ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие содержит лекции, вопросы для самоконтроля, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения и семинары.

После темы лекции приведен план изложения вопросов. Основные законы и определения в тексте лекций выделены жирным шрифтом. Формулы, определяющие физические величины и выражающие основные законы, имеют двойную нумерацию. Первое число номера означает номер лекции по порядку, второе – номер формулы в данной лекции. Это облегчает нахождение формулы, если на нее есть ссылка.

В тексте лекции не дается подробного вывода формул, но есть указания на исходные формулы и законы.

Каждая лекция содержит поясняющие рисунки, имеющие нумерацию, подобную формулам.

После текста каждой лекции находятся вопросы и задания для самоконтроля. Среди этих заданий встречаются такие: построить структурно – логическую схему вывода уравнения…

Построение структурно – логической схемы вывода формулы обеспечивает более глубокое понимание логической связи между физическими величинами.

Принцип построения структурно – логической схемы вывода:

- записывается исходная формула и подчеркивается;
- записывается формула, расшифровывающая физическую величину, входящую в исходную формулу и соединяется с ней (величиной) одинарной стрелкой;
- записывается подробная «трансформация» всех физических величин;
- перед конечной формулой ставится двойная стрелка.

Построение структурно – логической схемы помогает осознать отдельные этапы вывода, логически увязать их в единое целое и запомнить весь вывод в единстве.

Покажем сказанное на примере. Задание: построить структурно – логическую схему вывода уравнения, связывающего угловое и тангенциальное ускорения.

$$
\begin{tikzcd}
\varepsilon=\frac{d\omega}{dt} \arrow[d] & d\omega=\frac{d\upsilon}{R} \arrow[l] & \omega=\frac{\upsilon}{R} \arrow[l] \\
\varepsilon=\frac{1}{R}\cdot\frac{d\upsilon}{dt} \arrow[d, Rightarrow] & a_\tau=\frac{d\upsilon}{dt} \arrow[l] & \\
\varepsilon=\frac{a_\tau}{R} & &
\end{tikzcd}
$$

Решение задач, описанных в примерах после текста лекций, основывается на теоретическом материале данной лекции и проведено по следующему плану:

Понять предложенную задачу.	*Что гласит задача? Что дано? Что нужно найти? Определено ли неизвестное данными задачи? Или они недостаточны, или же чрезмерны? Нельзя ли сформулировать задачу иначе? Нельзя ли найти связь между данной задачей и какой-нибудь задачей с известным решением? Или с задачей, решающейся проще? Решающейся сразу? Эти вопросы нужно повторять каждый раз, когда в ходе решения наступает заминка, при решении каждой промежуточной задачи. Кроме того: все ли данные задачи были уже использованы?*
Найти путь от неизвестного к данным, если нужно, рассмотрев промежуточные задачи («анализ»).	*Сформулировать отношение (или отношения) между неизвестным и данными.* *Преобразовать неизвестные элементы. Попытаться ввести новые неизвестные, более близкие к данным задачи. Преобразовать данные элементы. Попытаться получить, таким образом, новые элементы, более близкие к искомым неизвестным. Решить только часть задачи.* *Удовлетворить только части условий: насколько неопределенным окажется тогда неизвестное? (Геометрические места!) Обобщить. Рассмотреть частные случаи. Применить аналогию.*
Реализовать найденную идею решения (синтез).	*Испытывать правильность каждого шага, принимая лишь то, «что усматривается с полной ясностью или выводится с полной достоверностью» (Р.Декарт). «Заменить термины их определениями» (Б.Паскаль).*
Решение проверить и оценить критически.	*Правдоподобен ли результат? Почему? Нельзя ли сделать проверку? Нет ли другого пути, ведущего к полученному результату? Более прямого пути? Какие результаты еще можно получить на том же пути?*

В предложенных решениях задач основные формулы имеют одинарную нумерацию. Эта нумерация начинается сначала в каждой последующей задаче. Если в решении есть ссылки на формулы с двойной нумерацией, это означает, что используется формула из текста лекции.

В рассмотренных примерах показан принцип нахождения значений многих физических величин, что облегчит самостоятельное решение физических задач.

При работе с примерами решения задач будет полезно составлять граф – схемы.

Алгоритм построения граф - схемы решения

1. Записать формулу для главного физического явления, о котором идет речь в задаче. Эта формула должна содержать искомую величину.

2. Сопоставить величины, входящие в формулу, с краткой записью условия задачи в столбик: величины, имеющиеся в условии, обвести кружком.

3. От величин, не представленных в условии, провести вертикальные стрелки вверх или вниз. Для каждой стрелки подобрать формулу, раскрывающую «ее» величину, то есть формулу, из которой может быть найдена эта величина.

4. Записать каждую раскрывающую формулу так, чтобы стрелка соединяла символы неизвестной величины.

Указания. Конец процедуры наступит тогда, когда в схеме не останется свободных величин; это значит: все они либо обведены кружком (то есть представлены в условии), либо соединены стрелками. Еще один признак того, что веточки схемы закрыты: они заканчиваются величинами, взятыми в кружок.

При сопоставлении записанной исходной формулы с условием известными величинами считать данные, а также физические константы – величины, которые неявно присутствуют в условии и могут быть найдены по таблицам.

Перед построением граф - схемы положено по краткой записи условия определить общий вид формулы – решения как функциональной зависимости *f=f(a,b,c,…,n).* Такая запись может играть роль ориентира, по которому после свертывания схемы проверяется каждый этап решения.

Проиллюстрируем использование данного алгоритма на примере.

Задача: Электродвигатель подъемного крана работает при напряжении 380В, сила тока в его обмотке равна 20А. Каков КПД установки, если груз массой 1т кран поднимает равномерно на высоту 19м за 50с?

Работа над граф – схемой.

После подбора необходимых формул находим предполагаемый вид функциональной зависимости искомой величины η: η= f (U,I,m,h,t,A), где f – функция, *U,I,m,h,t* – величины, явно заданные в условии, A – член, символизирующий наличие в условии неявно заданных величин.

Затем строится сама граф – схема, показанная на рисунке.

Дано:

$U = 380$ В
$I = 20$ А
$m = 1$ т
$h = 19$ м
$t = 50$ с
$g = 9{,}8$ м/с^2

η – ?

Граф–схема I.

(5) $h = S$ $\quad \cos\alpha = 1 \quad (\alpha = 1) \quad$ (6)

$A' = F \cdot S \cdot \cos\alpha$ (3)

(2) $A_п = A'$ $\quad F = |F_{тяги}|$ (4)

$|F_{тяги}| = |P|$ (7)

? $\eta = \dfrac{A_п}{A_з}$ (1)

(8) $P = m \cdot g$

$A_з = I\,U\,t$ (9)

После тем «Механика и динамика поступательного и вращательного движения», «Колебания» и «Молекулярная физика и термодинамика» описаны семинары по данным темам, включающие задания для повторения и экспериментальные задачи.

Лекция № 1.
Кинематика.

1. **Введение.**
2. **Механическое движение.**
3. **Скорость и ускорение материальной точки.**
4. **Кинематика вращательного движения.**
5. **Аналогия между формулами кинематики поступательного и вращательного движения.**

1. Введение.

Физика – наука о наиболее общих законах природы. Источниками физических знаний являются наблюдения физических явлений и опыты.

Физическое явление – совокупность закономерно связанных изменений, происходящих в природе с течением времени.

Наблюдение – созерцание физического явления.

Опыт – специально воспроизведённое в лабораторных условиях физическое явление.

На основе анализов физических явлений и опытов выявляются физические законы – закономерные связи между происходящими явлениями. При их анализе бывает трудно отделить главное от второстепенного. Для этого используют физические модели или схемы. Например: любой предмет в физике называется телом. Или тело, размером которого в данных условиях можно пренебречь – материальной точкой.

2. Механическое движение.

Любое изменение в природе (смена времён года, таяние снега, падение листа и т.д.) называется движением. Механика – раздел физики, изучающий механическое движение.

Механическим движением называется изменение положения тела, происходящее в пространстве относительно других тел с течением времени.

Основной задачей механики является определение положение тела в любой момент времени.

Для её решения необходима ***система отсчёта – произвольно выбираемое тело отсчёта, связанная с ним система координат и прибор для измерения времени (часы).***

Кинематика – раздел механики, изучающий механическое движение независимо от сил, действующих на тело.

Основными понятиями кинематики являются:

1) траектория – линия, вдоль которой происходит движение.
2) путь – длина траектории (скалярная величина, измеряемая в метрах).
3) перемещение – направленный отрезок (вектор) соединяющий начальную и конечную точки траектории.
4) скорость – величина, показывающая перемещение, совершаемое в единицу времени.
5) ускорение – величина, показывающая как изменяется скорость в единицу времени.

3. Скорость и ускорение точки.

Пусть за время Δt материальная точка переместилась по криволинейной траектории из положения А в положение В. (рис. 1.1) Положение точки в пространстве можно задавать радиус вектором – вектором проведённым из начала координат в место нахождения точки. Из рисунка видно, что перемещение точки за время Δt

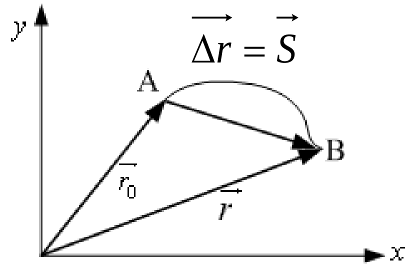


Рис. 1.1.

$$\vec{S} = \vec{r} - \vec{r_0} = \overrightarrow{\Delta r} \quad (1.1)$$

Физическая величина, равная отношению перемещения к промежутку времени, за который оно было совершено, называется средней скоростью движения.

$$\langle \vec{\upsilon} \rangle = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} \quad \left[\frac{м}{с} \right] \quad (1.2)$$

Разобьем промежуток времени Δt на бесконечно малые промежутки Δt_i. Каждому такому промежутку соответствует перемещение $\overrightarrow{\Delta r_i}$. Предел, к которому стремится отношение $\overrightarrow{\Delta r_i}$ и Δt_i называется мгновенной скоростью.

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r_i}}{\Delta t_i} \quad (1.3)$$

Перемещение $\vec{S} = \overrightarrow{\Delta r}$ можно представить в виде суммы взаимно перпендикулярных векторов $\vec{S_x}$ и $\vec{S_y}$ (рис. 1.2). Из рисунка видно, что

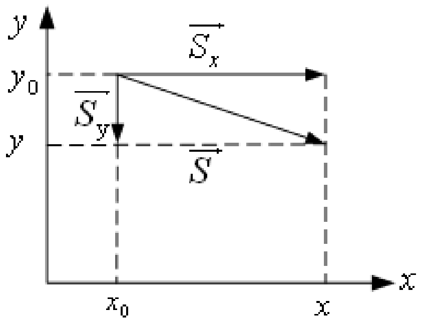


Рис. 1.2.

$$S_x = x - x_0 = \Delta x; \; S_y = y - y_0 = \Delta y$$

то есть перемещения вдоль осей x и y равны изменению соответствующих координат. Тогда для мгновенных скоростей υ_x и υ_y получим:

$$\upsilon_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}; \upsilon_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} \quad (1.4)$$

Так как значение координаты изменяется с течением времени, то координата является функцией времени. Из математики известно, что предел, к которому стремится отношение приращение функции к приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, называется первой производной. Таким образом:

Мгновенная скорость есть первая производная координаты по времени.

Для описания прямолинейного движения достаточно одной координатной оси ОХ, направленной параллельно движению.

В случае равномерного движения скорость – величина постоянная. $\upsilon = const$. При этом, $\upsilon_y = 0$; $\upsilon_z = 0$; $\upsilon = \upsilon_x = \frac{dx}{dt}$. Отсюда $dx = \upsilon \cdot dt$. Интегрируя, получим:

$$x = x_0 + \upsilon \cdot t \quad (1.5).$$

Уравнение (1.5) называется уравнением равномерного прямолинейного движения и является решением основной задачи механики для этого движения.

При неравномерном движении скорость может меняться как по модулю, так и по направлению.

Пусть за время Δt скорость изменяется на $\overrightarrow{\Delta \upsilon}$. Физическая величина

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\overrightarrow{\Delta \upsilon}}{\Delta t} \left[\frac{м}{с^2} \right] \quad (1.6)$$

называется средним ускорением. При $\Delta t \to 0$ переходим к пределу

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta \upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \quad (1.7).$$

Величина $\vec{a}$ называется мгновенным ускорением и является первой производ-

ной скорости по времени или второй производной координаты по времени.

Из уравнения (1.7) следует: $d\upsilon = a \cdot dt$, интегрируя, получим: $\upsilon = \int a \cdot dt$.

При равноускоренном движении ускорение – величина постоянная $a = const$. Тогда $\upsilon = \upsilon_0 + a \cdot t$ (1.8) – зависимость скорости от времени при равноускоренном движении. Как было показано выше $x = \int \upsilon \cdot dt$. Тогда $x = \int (\upsilon_0 + at) \cdot dt$; $x = x_0 + \upsilon_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$ (1.9) – уравнение равноускоренного движения или решение основной задачи механики для равноускоренного движения.

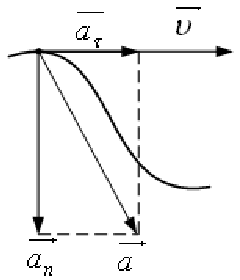


Рис. 1.3.

При криволинейном движении вектор ускорения может образовывать с вектором скорости произвольный угол. Скорость всегда направлена по касательной к траектории (рис. 1.3). Представим вектор ускорения $\vec{a}$ в виде суммы двух взаимно перпендикулярных векторов $\vec{a}_\tau$, направленным вдоль скорости и, перпендикулярного ему – $\vec{a}_n$.

По теореме Пифагора $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ (1.10). Величина $a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}$ (1.11) называется тангенциальным ускорением и «отвечает» за изменение скорости по направлению.

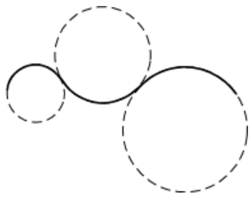


Рис. 1.4.

Любую криволинейную траекторию можно представить в виде совокупности дуг окружностей различного радиуса (рис. 1.4). Поэтому значение нормального ускорения определим на примере движения точки по окружности с постоянной по модулю скоростью.

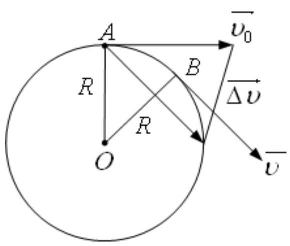


Рис. 1.5.

Пусть за время Δt точка переместилась из положения A в положение B (рис. 1.5). Совместив параллельным переносом начала векторов $\vec{\upsilon}_0$ и $\vec{\upsilon}$, найдём изменение скорости $\overrightarrow{\Delta\upsilon}$. Если промежуток времени Δt очень мал ($\Delta t \to 0$), то $\overrightarrow{\Delta\upsilon}$ перпендикулярен скорости $\vec{\upsilon}$ и направлен к центру окружности. Поэтому нормальное ускорение $a_n = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$ (1.12) иначе называют центростремительным ускорением.

Треугольники OAB и $\upsilon_0 \Delta\upsilon\upsilon$ подобны как равнобедренные с углом при вершине, образованным взаимно перпендикулярными сторонами ($OA \perp \upsilon_0$; $OB \perp \upsilon$). Из подобия треугольников следует равенство отношений сходственных сторон: $\frac{\Delta\upsilon}{AB} = \frac{\upsilon}{R}$. При $\Delta t \to 0$ дуга AB неотличима от хорды AB. Поэтому можно утверждать, что $AB = \upsilon \cdot \Delta t$. Тогда: $\frac{\Delta\upsilon}{\upsilon\Delta t} = \frac{\upsilon}{R}$. Отсюда $\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{\upsilon^2}{R}$ (1.13). Сравнивая (1.12) и (1.13) получим: $a_n = \frac{\upsilon^2}{R}$ (1.14).

4. Кинематика вращательного движения.

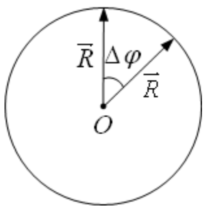


Рис. 1.6.

При движении по окружности положение точки удобно задавать углом поворота радиус вектора, проведённого из центра окружности. При этом угол поворота $\Delta\varphi$ называется угловым перемещением.

Величина $\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ (1.15) называется средней угловой скоростью.

При $\Delta t \to 0$ переходим к пределу:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}; \ \omega = \frac{d\varphi}{dt} \ (1.16)$$ мгновенная угловая скорость.

Мгновенная угловая скорость есть первая производная углового перемещения по времени.

Между линейной и угловой скоростью существует связь.

Из математики известно, что длина дуги $d\ell = R \cdot d\varphi$. С другой стороны $d\ell = \upsilon \cdot dt$. Приравнивая правые части, получим: $R \cdot d\varphi = \upsilon \cdot dt$. Отсюда $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\upsilon}{R}$. Сравнивая с (1.16), получим: $\omega = \frac{\upsilon}{R}$ (1.17).

Вращение с постоянной угловой скоростью называют равномерным вращением. Его характеризуют ***периодом обращения T – промежутком времени, за который совершается один полный оборот.*** Тогда: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (1.18).

Величина обратная периоду обращения $\nu = \frac{1}{T}$ ***(1.19) называется частотой обращения и показывает число оборотов, совершаемых в единицу времени.*** Из (1.18) , (1.19) следует: $\omega = 2\pi \cdot \nu$ (1.20).

При неравномерном вращении угловая скорость меняется. Величина $\langle \varepsilon \rangle = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$ (1.21) называется угловым ускорением. При $\Delta t \to 0$ $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ (1.22).

Мгновенное угловое ускорение есть первая производная угловой скорости по времени или вторая производная углового перемещения по времени.

Из (1.22) и (1.17) следует: $\varepsilon = \frac{1}{R} \cdot \frac{d\upsilon}{dt}$, но по (1.11) $\frac{d\upsilon}{dt} = a_\tau$. Тогда $\varepsilon = \frac{a_\tau}{R}$ (1.23).

5. Аналогия между формулами поступательного и вращательного движения.

Поступательное	Вращательное
$\upsilon = \frac{dr}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
$\upsilon = \upsilon_0 + a \cdot t$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$
$S = \upsilon_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$

Вопросы для самоконтроля.

1. Что называется физическим явлением?
2. В чём разница между наблюдением и опытом?
3. Что такое механическое движение?
4. В чём заключается основная задача механики?
5. Что такое система отсчёта?
6. Что такое траектория?
7. Что такое путь?
8. Что такое перемещение?
9. Что такое скорость?
10. Что такое ускорение?
11. Формула средней скорости.
12. Определение мгновенной скорости.

13. Формула мгновенной скорости, как производной координаты по времени.
14. Формула среднего ускорения.
15. Формула мгновенного ускорения.
16. Уравнение равноускоренного движения.
17. Формула тангенциального ускорения.
18. Структурно–логическая схема вывода формулы нормального ускорения.
19. Формула нормального ускорения.
20. Что такое радиус – вектор?
21. Что такое угловое перемещение?
22. Формула средней угловой скорости.
23. Формула мгновенной угловой скорости.
24. Структурно–логическая схема вывода формулы, связывающей угловую и мгновенную скорости.
25. Что такое период обращения?
26. Что такое частота обращения?
27. Формула циклической частоты.
28. Формула среднего углового ускорения.
29. Формула мгновенного углового ускорения.
30. Структурно–логическая схема вывода формулы, связывающей угловое и тангенциальное ускорение.

Примеры решения задач.

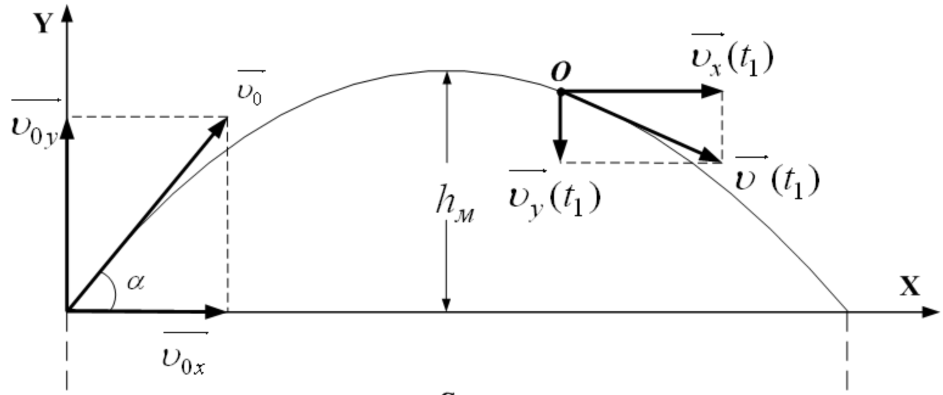
Тело брошено со скоростью υ_0 =20 м/с под углом 30° к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти скорость тела, его нормальное и тангенциальное ускорения, радиус кривизны траектории через 1,5 с после начала движения, а так же, написать уравнения движения тела, уравнение траектории, определить время его движения, максимальную высоту подъёма и дальность полёта тела.

Дано:

υ_0 =20 м/с
$\alpha = 30°$
t_1=1,5 с

$\upsilon(t_1)$ – ?
$a_n(t_1)$ – ?
$a_\tau(t_1)$ – ?
$R(t_1)$ – ?
$x = x(t)$ – ?
$y = y(t)$ – ?
$y = y(x)$ – ?
t – ?
$h_м$ – ?
S – ?

Решение:



Представим вектор начальной скорости $\vec{\upsilon_0}$ в виде суммы двух взаимноперпендикулярных векторов: $\vec{\upsilon_0} = \vec{\upsilon_{0x}} + \vec{\upsilon_{0y}}$. Из рисунка видно, что $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cdot \cos\alpha$ (1); $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \cdot \sin\alpha$ (2).

По условию задачи сопротивлением воздуха можно пренебречь. Значит, вдоль оси X на тело не действуют никакие силы. Поэтому движение вдоль оси X можно считать равномерным, происходящим с постоянной скоростью $\vec{\upsilon_{0x}}$. Тогда по (1.5) уравнение движения вдоль оси X будет: $x = x_0 + \upsilon_{0x}t$. Совмещая начало координат с точкой вылета тела ($x_0 = 0$; $y_0 = 0$), и, учитывая (1) получим: $x = \upsilon_0 \cdot t \cdot \cos\alpha$. Подставляя численные значения, Получим: $x = 20t \cdot \cos 30^{\circ}$.

$x = 10\sqrt{3} \cdot t$ (3) – **уравнение движения вдоль оси X:** $x = x(t)$.

Вдоль оси Y на тело действует сила тяжести, сообщающая всем телам одинаковое ускорение $g = 9{,}8$ м/с^2 и направленная противоположно оси Y. Тогда по (1.9), учитывая, что $y_0 = 0$ и, что проекция $\vec{a} = \vec{g}$ на ось Y отрицательна, получим: $y = \upsilon_{0y} t - \dfrac{g \cdot t^2}{2}$. Или, учитывая (2) и, подставляя численные значения, получим $y = 20 \cdot t \cdot \sin 30^{\circ} - \dfrac{9{,}8 \cdot t^2}{2}$;

$y = 10 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$ (4) – **уравнение движения вдоль оси Y:** $y = y(t)$.

Написать уравнение траектории $y = y(x)$ – значит выразить зависимость координаты y от координаты x. Для этого из уравнений движения нужно исключить время и объединить их в одно.

Из (3) следует: $t = \dfrac{x}{10\sqrt{3}}$. Подставляя значение t в (4), получим: $y = 10 \cdot \dfrac{x}{10\sqrt{3}} - 4{,}9 \cdot \left(\dfrac{x}{10\sqrt{3}}\right)^2$ или

$y = \dfrac{x}{\sqrt{3}} - \dfrac{4{,}9}{300} \cdot x^2$ (5) – **уравнение траектории:** $y = y(x)$.

Предположим, что через 1,5 с после начала движения тело находится в точке ***O*.** Тогда, разложив вектор полной скорости $\vec{\upsilon}$, направленный по касательной к траектории, на взаимноперпендикулярные вектора $\vec{\upsilon_x}$ и $\vec{\upsilon_y}$, по теореме Пифагора получим:

$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$ (6).

По (1.4) $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}$; $\upsilon_y = \dfrac{dy}{dt}$. Дифференцируя (3) и (4), получим: $\upsilon_x = 10\sqrt{3}$ (7); $\upsilon_y = 10 - 9{,}8t$ (8). Подставляя значения υ_x, υ_y и численное значение t в (6), получим $\upsilon(t_1) = \sqrt{300 + (10 - 9{,}8 \cdot 1{,}5)^2} \approx 18$ м/с – **скорость, через 1,5 с после начала движения**.

По (1.11) $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}$. Подставляя в уравнение (6) υ_x и υ_y из (7) и (8), получим зависимость полной скорости от времени: $\upsilon = \sqrt{300 + (10 - 9{,}8 \cdot t)^2}$ или $\upsilon = \left[300 + (10 - 9{,}8 \cdot t)^2\right]^{1/2}$.

Тогда

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{1}{2}\left[300 + (10 - 9{,}8 \cdot t)^2\right]^{-1/2} \cdot \frac{d}{dt}\left[300 + (10 - 9{,}8 \cdot t)^2\right] = \frac{\frac{d}{dt}\left(300 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 9{,}8 \cdot t + 9{,}8^2 t^2\right)}{2\sqrt{400 - 196 \cdot t + 96{,}04 \cdot t^2}}$$

$$= \frac{192{,}03 \cdot t - 196}{2\sqrt{400 - 196 \cdot t + 96{,}04 \cdot t^2}}.$$

Подставляя численное значение t =1,5 с, получим:
$a_\tau(t_1) \approx 2{,}57$ м/с^2 – **тангенциальное ускорение, через 1,5 с после начала движения**.

Ранее было показано, что в течение всего движения, тело движется с одним и тем же ускорением – g =9,8 м/с^2. Таким образом, ускорение свободного падения есть полное ускорение тела в любой точке траектории. Тогда по (1.10) $g = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$. Отсюда: $a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2}$. Подставляя численные значения, получим $a_n(t_1) \approx 9{,}46$ м/с^2 – **нормальное**

ускорение, через 1,5 с после начала движения.

По (1.14) $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R}$. Отсюда $R = \dfrac{\upsilon^2}{a_n}$. Тогда: $R(t_1) \approx 34{,}25$ м – **радиус кривизны траектории, через 1,5 с после начала движения**.

Максимальную высоту подъёма тела можно найти по формуле (4): $h_м = 10t_п - 4{,}9t_п{}^2$ (9), где $t_п$ – время подъёма тела.

В верхней точке траектории игрековая составляющая скорости равна нулю. Тогда, учитывая (1.8) и (8) получим: $0 = 10 - 9{,}8 \cdot t_п$. Отсюда $t_п = \dfrac{10}{9{,}8} \approx 1{,}02$ с. Подставляя в (9), получим: $h_м \approx 5{,}1$ м – **максимальная высота подъёма тела.**

Естественно, что время всего полёта в 2 раза больше времени подъёма. Тогда $t = 2 \cdot t_п$; $t = 2{,}04$ с – **время полёта тела.**

Так как вдоль оси X, тело движется с постоянной скоростью (см. 7), то дальность полёта тела: $S = \upsilon_x \cdot t$; $S \approx 35{,}33$ м – **дальность полёта тела.**

Ответ: $x = 10\sqrt{3} \cdot t$, $y = 10 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$, $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}} - \dfrac{4{,}9}{300} \cdot x^2$, $h_м \approx 5{,}1$ м, $t = 2{,}04$ с, $S \approx 35{,}33$ м.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Движение материальной точки задано уравнением $x = 4 \cdot t - 0{,}05 \cdot t^2$. Определить момент времени, в который скорость точки равна нулю. Найти координату и ускорение точки в этот момент.

2. Движение двух материальных точек задано уравнениями: $x_1 = 20 + 2 \cdot t - 4 \cdot t^3$, $x_2 = 2 + 2 \cdot t + 0{,}5 \cdot t^2$. В какой момент времени скорости точек будут одинаковыми? Определить расстояние между точками в этот момент времени.

3. Диск радиусом 20 см вращается согласно уравнению: $\varphi = 3 - t + 0{,}1 \cdot t^2$ Определить тангенциальное, нормальное и полное ускорения точек на окружности диска для момента времени t=10 с.

4. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением 2 с$^{-2}$. Через 0,5 с после начала движения полное ускорение точки на ободе колеса стало равно 0,136 м/с^2.Найти радиус колеса.

5. Точка движется по окружности, согласно уравнению: $\varphi = 0{,}2 \cdot t^3$. В какой момент времени нормальное ускорение точки будет равно её тангенциальному ускорению? Определить полное ускорение точки в этот момент.

Лекция № 2.
Динамика материальной точки.

1. **I закон Ньютона. Инерциальные системы отсчёта.**
2. **Масса. Сила. Импульс.**
3. **II и III законы Ньютона.**

1. I закон Ньютона. Инерциальные системы отсчёта.

В отличие от кинематики динамика изучает причины механического движения. В её основе лежат законы Ньютона, являющиеся фундаментальными законами природы, подтвердить или опровергнуть которые можно только на опыте.

I закон Ньютона гласит:

Все тела сохраняют состояние покоя или равномерного прямолинейного движения (то есть сохраняют свою скорость неизменной) если на них не действуют другие тела или их действия скомпенсированы.

Явление сохранения скорости неизменной называется инерцией. Поэтому I закон Ньютона называют законом инерции.

Из I закона Ньютона следует, что равномерное прямолинейное движение или покой есть естественные состояния тел, освобождённых от внешнего воздействия. Инерция не причина движения, а его свойство.

В кинематике все системы отсчёта равноправны. Выбор той или иной системы обусловлен простотой математического расчёта. В динамике одно и то же движение в различных системах будет различным.

Системы, в которых выполняется I закон Ньютона называются инерциальными.

Любая система отсчёта, движущаяся с постоянной скоростью относительно некоторой инерциальной системы, также является инерциальной.

2. Масса. Сила. Импульс.

Из I закона Ньютона следует, что воздействие на тело других тел не является причиной движения, а является причиной изменения этого движения, то есть причиной ускорения.

При одинаковых воздействиях различные тела приобретают различные ускорения. Можно утверждать, что ускорение тела зависит не только от внешнего воздействия, но и от свойств самого тела, его способности сопротивляться внешнему воздействию.

Это свойство тел получило название инертности. ***Мерой инертности тел является масса, измеряемая в СИ в килограммах.***

В классической механике масса величина постоянная.

Физическая величина, численно равная массе единицы объёма вещества, называется плотностью. При равномерном распределении массы по объёму $\rho = \frac{m}{V}$ (2.1) $\left[\frac{кг}{м^3}\right]$, при неравномерном $\rho = \frac{dm}{dV}$ (2.2).

Причиной ускорения тела служит нескомпенсированное действие на него других тел. Это действие носит взаимный характер и называется взаимодействием.

Сила – векторная физическая величина, являющаяся мерой взаимодействия тел, и причиной, вызывающей ускорение или деформацию тела.

В общем случае сила зависит от взаимного расположения тел и скорости движения тел или частей одного и того же тела относительно друг друга. Например: сила всемирного тяготения $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$; сила упругости $F = -k \cdot x$; сила сопротивления вязкой среды, движущемуся в ней шарообразному телу $F = 6\pi \cdot \eta \cdot R \cdot \upsilon$.

Опыт показывает, что при взаимодействии тела получают противоположные по направлению приращения скорости $\overrightarrow{\Delta \upsilon_1}$ и $\overrightarrow{\Delta \upsilon_2}$, но при этом всегда выполняется равенство $m_1 \cdot \overrightarrow{\Delta \upsilon_1} = -m_2 \cdot \overrightarrow{\Delta \upsilon_2}$. Так как масса от скорости не зависит – её можно внести под знак изменения: $\overrightarrow{\Delta m_1 \upsilon_1} = -\overrightarrow{\Delta m_2 \upsilon_2}$ (2.3).

Физическая величина $\vec{p} = \overrightarrow{m\upsilon}$ (2.4) получила название импульса тела. $[p] = \left[кг \cdot \frac{м}{с} \right]$.

Учитывая (2.4), (2.3) примет вид: $\overrightarrow{\Delta p_1} = -\overrightarrow{\Delta p_2}$ (2.5). При взаимодействии тел приращения их импульсов равны по величине и противоположны по направлению.

3. II и III законы Ньютона.

На тело одновременно может действовать несколько сил. Сила, вызывающая такое же действие, как и все приложенные к телу силы, называется равнодействующей.

II закон Ньютона гласит:

Равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равна скорости изменения импульса тела.

$$\vec{F} = \frac{\overrightarrow{dP}}{dt} \quad (2.6).$$

Учитывая (2.4), получим: $\vec{F} = \frac{d\overrightarrow{m\upsilon}}{dt}$ или $\vec{F} = m\frac{\overrightarrow{d\upsilon}}{dt}$ (2.7), но $\frac{\overrightarrow{d\upsilon}}{dt} = \vec{a}$ (см. 1.11). Тогда

$$\vec{F} = \overrightarrow{ma} \quad (2.8).$$

На основании (2.8) вводится единица измерения силы. Если тело массой 1 кг движется с ускорением 1 $м/с^2$, то на него действует сила 1 Н. $[Н] = \left[кг \frac{м}{с^2} \right]$.

Уравнение (2.7) позволяет решить основную задачу механики для поступательного движения. Из (2.7) следует: $d\upsilon = \frac{F}{m} \cdot dt$. Интегрируя, получим: $\upsilon = \int \frac{F}{m} \cdot dt + c_1$. Тогда $x = \int (\int \frac{F}{m} \cdot dt + c_1) \cdot dt + c_2$.

Постоянные c_1 и c_2, здесь являются неопределёнными и зависящими от выбора системы отсчёта.

Чтобы избавиться от неопределённости нужно чётко задать начальные условия. Например: тело, упавшее с полки движущегося вагона относительно земли и вагона движется по разному, хотя это движение происходит под действием только силы тяжести. Различие – в начальных условиях. Относительно вагона начальная скорость тела равна нулю, а относительно земли – скорости вагона.

III закон Ньютона гласит:

При взаимодействии тела действуют друг на друга с силами равными по величине и противоположными по направлению. Эти силы имеют одинаковую природу, но приложены к различным телам, поэтому они не имеют равнодействующей.

$$\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}} \quad (2.9)$$

Если взаимодействующие тела образуют одну систему, то сумма сил взаимодействия равна нулю. Такие силы называют внутренними, а системы замкнутыми.

Вопросы для самоконтроля.

1. Сформулировать первый закон Ньютона.

2. Что такое инерциальные системы отсчёта?
3. Что такое масса?
4. Что такое сила?
5. Что такое равнодействующая сил?
6. Что такое импульс?
7. Что такое плотность?
8. Формулы плотности.
9. Формула импульса.
10. Сформулировать второй закон Ньютона.
11. Формула второго закона Ньютона, как производная импульса по времени.
12. Структурно–логическая схема вывода формулы $F = ma$.
13. Сформулировать третий закон Ньютона.
14. Что такое замкнутая система тел?
15. Формула третьего закона Ньютона.

Примеры решения задач.

Задача № 1.

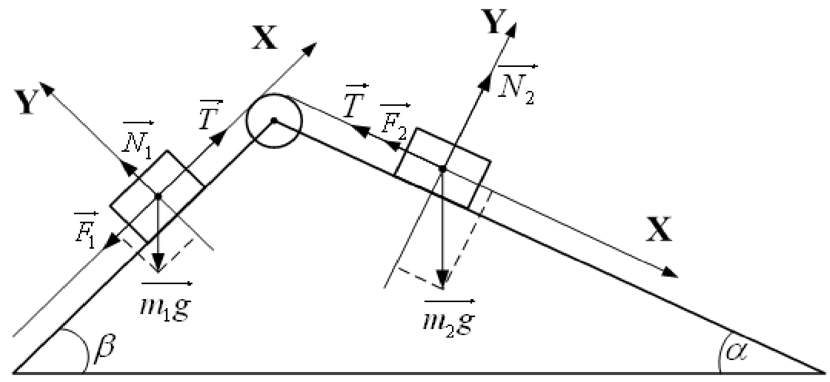
На вершине двух наклонных плоскостей, образующих с горизонтом углы 30° и 45°, укреплён невесомый блок, через который перекинута лёгкая нить. К концам нити прикреплены грузы массами m_1 = 1 кг и m_2 = 2 кг. На первый груз действует сила сопротивления движению F_1 = 0,7 Н, на второе – F_2 =1,7 Н. Определить ускорение грузов, силу натяжения нити и силы реакции опоры, действующие на тела.

Дано:

$\alpha = 30°$
$\beta = 45°$
m_1 = 1кг
m_2 = 2 кг
F_1 = 0,7 Н
F_2 =1,7 Н

a – ?
T – ?

Решение:



При решении задач на движение тел, происходящее под действием нескольких сил, второй закон Ньютона записывают в виде (2.8), учитывая, что $\vec{F}$ – равнодействующая всех сил, равная векторной сумме всех сил, приложенных к телу. Так для первого тела получим

$$\vec{F_1} + \vec{N_1} + \vec{T} + \overrightarrow{m_1 \cdot g} = \overrightarrow{m_1 \cdot a} \quad (1).$$

При решении задач на движение связанных тел, второй закон Ньютона записывают для всех тел, участвующих в движении. Для второго тела получим:

$$\vec{F_2} + \vec{N_2} + \vec{T} + \overrightarrow{m_2 \cdot g} = \overrightarrow{m_2 \cdot a} \quad (2).$$

Далее от действия над векторами переходят к действию над их проекциями. Для этого нужно выбрать направления осей координат. При этом ось X удобно направлять либо в сторону действия большего числа сил, либо в сторону направления движения. В нашем случае трудно выбрать преимущественное направление сил. Значит оси X направим вдоль линий движения тел, но определить сразу, куда движутся тела невозможно. Для определения направления движения воспользуемся тем, что сила трения не может изменять направления движения. Поэтому направления движения выясним, предположив, что трение отсутствует. В этом случае ускорение тел определяется разностью составляющих сил тяжести, направленных вдоль соответствующих плоскостей.

Из рисунка видно, что составляющая силы тяжести, действующей на первое тело, будет: $m_1 g \cdot \sin\beta$ = 6,9 Н, а на второе – $m_2 g \cdot \sin\alpha$ = 9,8 Н.

Таким образом

$$m_2 g \cdot \sin\alpha > m_1 g \cdot \sin\beta \,,$$

следовательно: первое тело будет подниматься по плоскости, второе – опускаться.

Теперь спроецируем (1) и (2) на соответствующие оси координат:

на X $\quad -F_1 + T - m_1 g \cdot \sin\beta = m_1 a$ (3) $\quad -F_2 - T + m_2 g \cdot \sin\alpha = m_2 a$ (4)

на Y $\quad N_1 - m_1 g \cdot \cos\beta = 0$ (5) $\quad N_2 - m_2 g \cdot \cos\alpha = 0$ (6)

Из (3) следует: $a = \dfrac{T - F_1}{m_1} - g \cdot \sin\beta$ (7), подставляя значение a в (4), получим:

$$m_2 g \cdot \sin\alpha - F_2 - T + m_2 g \cdot \sin\alpha = m_2 \cdot \left(\frac{T - F_1}{m_1} - g \cdot \sin\beta \right).$$

Решая это уравнение, относительно T – получим:

$$T = \left(\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \right) \cdot \left(g \cdot (\sin\alpha + \sin\beta) - \frac{F_2}{m_2} + \frac{F_1}{m_1} \right)$$

Подставляя численные значения, получим: $T \approx$ **7,8 Н.**

Подставляя значение T в (7), получим: $a =$ **2,2 м/с^2**.

Ответ: $T \approx$ **7,8 Н;** $a =$ **2,2 м/с^2.**

Задача № 2.

Моторная лодка, массой 400 кг начинает движение из состояния покоя. Сила тяги двигателя 200 Н. Считая силу сопротивления движению пропорциональной скорости, определить скорость лодки через 20 с после начала движения. Коэффициент сопротивления r = 20 кг/с.

Дано:

m = 400 кг
F = 200 Н
$F_c = r \cdot \upsilon$
r =20 кг/с
t = 20 с

υ - ?

Решение:

В этом случае на тело действует переменная сила сопротивления. Значит и его ускорение будет меняться с течением времени. По второму закону Ньютона:

$$F - F_c = ma$$

Так как ускорение переменное, то, учитывая (1.7) и значение F_c, второй закон Ньютона примет вид:

$$F - r\upsilon = m \cdot \frac{d\upsilon}{dt}$$

Разделим переменные следующим образом:

$$\frac{dt}{m} = \frac{d\upsilon}{F - r\upsilon}$$

Произведём замену переменной: $d\upsilon = \dfrac{d(F - r\upsilon)}{-r}$. Тогда: $\dfrac{dt}{m} = -\dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{d(F - r\upsilon)}{F - r\upsilon}$.

Интегрируя последнее уравнение, получим: $\displaystyle\int_0^t \frac{dt}{m} = -\frac{1}{r} \cdot \int_0^\upsilon \frac{d(F - r\upsilon)}{F - r\upsilon}$;

$\frac{t}{m} = -\frac{1}{r} \cdot \ln(F - r\upsilon)\Big|_0^{\upsilon}$. Подставляя пределы интегрирования в левую часть равенства, получим: $\frac{t}{m} = -\frac{1}{r} \cdot (\ln(F - r\upsilon) - \ln F)$. Учитывая, что разность логарифмов равна логарифму отношения, получим: $\frac{t}{m} = -\frac{1}{r} \cdot \ln\frac{F - r\upsilon}{F}$. Отсюда: $-\frac{r \cdot t}{m} = \ln\frac{F - r\upsilon}{F}$. Потенцируя, получим: $e^{-\frac{r \cdot t}{m}} = \frac{F - r\upsilon}{F}$. Отсюда: $\upsilon = \frac{F}{r}(1 - e^{-\frac{r \cdot t}{m}})$.

$$\upsilon \approx 6{,}32 \text{ м/с.}$$

Ответ: $\upsilon \approx 6{,}32$ м/с.

Задачи для самостоятельного решения.

6. Сила сопротивления воздуха, действующая на капли тумана, прямо пропорциональна произведению радиуса капли на её скорость. Капли радиусом 0,1 мм имеют у земли скорость 1 м/с. Какую скорость будут иметь у земли капли, радиус которых в 10 раз меньше?

7. На тело массой 10 кг, лежащее на наклонной плоскости с углом наклона 20°, действует горизонтально направленная сила 8 Н. Пренебрегая трением, определить ускорение, с которым движется тело.

8. Катер массой 2 т трогается с места и в течение 10 с развивает скорость 4 м/с. Определить силу тяги мотора, считая её постоянной. Принять силу сопротивления движению пропорциональной скорости. Коэффициент пропорциональности равен 100 кг/с.

Лекция № 3.
Силы в природе.

1. **Силы трения.**
2. **Сила упругости. Закон Гука.**
3. **Сила всемирного тяготения. Сила тяжести.**
4. **Вес тела.**

1. Силы трения.

Это силы, возникающие при движении одного тела по поверхности другого или при движении частей тела относительно друг друга. В первом случае трение называется внешним, во втором – внутренним.

Силы трения направлены по касательным к поверхностям и препятствуют их смещению относительно друг друга.

Различают сухое и вязкое трение. В случае сухого трения силы трения возникают не только при движении одного тела по поверхности другого, но и при попытках вызвать такое движение.

Действительно: чтобы сдвинуть тело с места, к нему нужно приложить некоторое усилие. Если это усилие меньше некоторого значения F_0 – тело остаётся в состоянии покоя. По первому закону Ньютона это значит, что наше усилие компенсируется какой-то силой. Эта сила называется силой трения покоя.

Опыт показывает, что максимальная сила трения покоя прямо пропорциональна силе нормального давления (силе, действующей со стороны одного тела на другое перпендикулярно трущимся поверхностям).

$$F_0 = \mu \cdot N \quad (3.1).$$

Безразмерный коэффициент μ называется коэффициентом трения и зависит от рода вещества, из которого изготовлены трущиеся тела, и качества обработки их поверхностей. При малых скоростях сила сухого трения не зависит от скорости движения тел.

В отличие от сухого, сила вязкого трения обращается в нуль, как только скорость становится равной нулю. Таким образом, в вязкой среде (в жидкости или газе) отсутствует сила трения покоя. При движении тел в вязких средах на них действуют силы сопротивления, которые могут во много раз превосходить силы трения и зависят от скорости движения и формы тел.

2. Сила упругости.

Это сила, возникающая при деформации тел. То есть при смещении частей тела относительно друг друга под действием внешней силы.

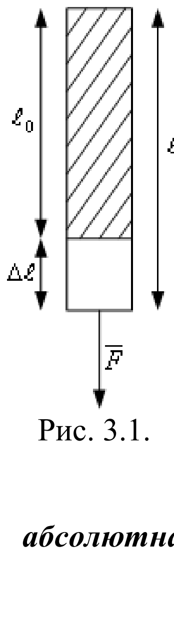


Рис. 3.1.

Если после снятия внешней нагрузки, тело полностью восстанавливает свои размеры и форму – деформация называется упругой.

В области упругой деформации сила упругости прямо пропорциональна деформации и направлена в противоположную сторону смещения частей тела – закон Гука.

$$F = -k \cdot x \,(3.2)$$

Пусть под действием силы F стержень имевший длину ℓ_0, растягивается до длины ℓ (рис.3.1). ***Физическая величина*** $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ (3.3), ***показывающая на сколько изменились размеры тела называется абсолютной деформацией.***

Физическая величина $\varepsilon = \dfrac{\Delta\ell}{\ell_0}$ (3.4), ***показывающая во сколько раз абсолютная деформация отличается от начальных размеров тела, называется от-***

носительной деформацией.

Физическая величина, равная отношению силы, действующей на образец, к площади поперечного сечения образца, называется механическим напряжением.

$\sigma = \frac{F}{S}$ (3.5). В СИ измеряется в паскалях. $[Па] = \left[\frac{Н}{м^2}\right]$.

Опыт показывает, что ***в области упругой деформации механическое напряжение прямо пропорционально относительной деформации тела*** (также закон Гука).

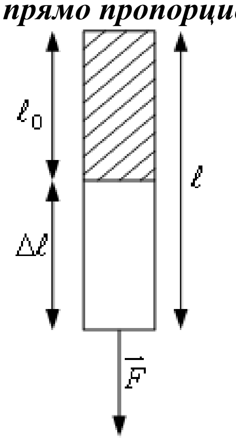


Рис. 3.2.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (3.6)$$

Физическая величина E называется модулем Юнга и зависит от рода вещества, из которого состоит тело. Из (3.6) следует, что модуль Юнга численно равен механическому напряжению если относительная деформация равна единице. Из (3.4) следует, что $\varepsilon = 1$ при условии, что $\Delta\ell = \ell_0$. Таким образом, ***модуль Юнга численно равен механическому напряжению, которое способно изменить размеры образца в два раза*** (рис. 3.2).

Естественно, что далеко не каждое вещество способно выдержать такие нагрузки, поэтому модуль Юнга абстрактная физическая величина, которую можно отнести к ещё одной физической модели.

3. Сила всемирного тяготения. Сила тяжести.

Закон всемирного тяготения (или всемирной гравитации) был сформулирован Ньютоном. Он гласит: ***все тела притягиваются друг к другу с силами прямо пропорциональными массам тел и обратно пропорциональными квадрату расстояния между ними.*** $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$ (3.7).

Физическая величина $G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$ была определена английским лордом Кавендишем с помощью крутильных весов и называется гравитационной постоянной. Она показывает силу взаимного притяжения двух точечных тел массами по одному килограмму каждое, расположенных на расстоянии 1 м друг от друга.

Как известно, при свободном падении все тела движутся с одинаковым ускорением $g \approx 9{,}8\, м/с^2$. Это явление объясняется с помощью закона всемирной гравитации и второго закона Ньютона. По (3.7) вблизи от поверхности Земли на тело массой m действует сила притяжения $F = G \cdot \frac{M \cdot m}{R_З^2}$. По (2.8) эта сила $F = ma$. Приравнивая правые части, и, сокращая на m, получим: $a = G \cdot \frac{M}{R_З^2} = g \approx 9{,}8 \frac{м}{с^2}$.

Сила, с которой Земля притягивает к себе другие тела, называется силой тяжести. Учитывая второй закон Ньютона и значение ускорения свободного падения, для силы тяжести получим $F = mg$ (3.8).

4. Вес тела.

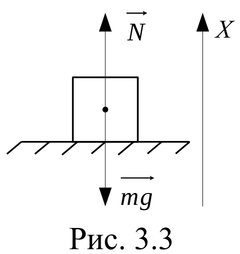


Рис. 3.3

Сила, с которой тело действует на горизонтальную опору или вертикальный подвес называется весом тела.

Рассмотрим три случая:

1) тело находится в состоянии покоя (рис. 3.3). На тело действуют две силы: сила тяжести $\vec{mg}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. По второму закону Ньютона $\vec{mg} + \vec{N} = \vec{ma}$. Так как тело покоится, то $a = 0$. В проекциях на

ось X получим: $N - mg = 0$. Отсюда $N = mg$.

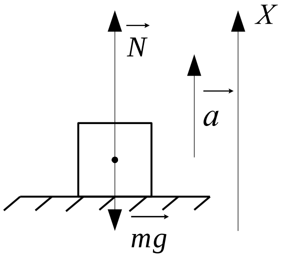


Рис. 3.4

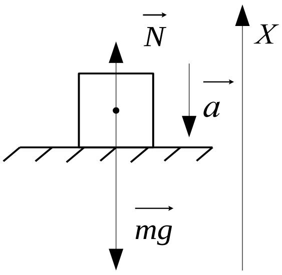


Рис. 3.5

По третьему закону Ньютона сила, с которой поверхность действует на тело равна силе, с которой тело действует на поверхность. Таким образом в состоянии покоя или при равномерном движении вес тела равен силе тяжести $P = mg$ (3.9).

2) тело движется ускоренно вверх (рис.3.4)

По второму закону Ньютона $\overrightarrow{mg} + \vec{N} = \overrightarrow{ma}$. В проекциях на ось X: $N - mg = ma$ или $N = m \cdot (g + a)$. По третьему закону Ньютона $P = N$. При ускоренном движении вверх вес тела больше силы тяжести. $P = m \cdot (g + a)$ (3.10). Говорят, что тело испытывает перегрузки. Так, при старте ракеты, космонавты испытывают десятикратные перегрузки.

3) тело движется ускоренно вниз (рис. 3.5). По второму закону Ньютона $\overrightarrow{mg} + \vec{N} = -\overrightarrow{ma}$. В проекциях на ось X: $N = m \cdot (g - a)$. По третьему закону Ньютона $P = N$ $P = m \cdot (g - a)$ (3.11). При ускоренном движении вниз вес тела меньше силы тяжести. Если тело движется вниз с ускорением свободного падения, то по (3.11) $P = m \cdot (g - g) = 0$. Свободно падающие тела находятся в состоянии невесомости.

Вопросы для самоконтроля.

1. Дать определение силы трения.
2. Что такое сухое трение?
3. Что такое вязкое трение?
4. Что такое сила трения покоя?
5. Формула силы трения покоя.
6. Что такое сила нормального давления?
7. От чего зависит коэффициент трения?
8. Что такое силы упругости?
9. Что такое деформация?
10. Что такое абсолютная деформация?
11. Что такое относительная деформация?
12. Формула относительной деформации.
13. Сформулировать закон Гука для абсолютной деформации.
14. Формула закона Гука для абсолютной деформации.
15. Что такое механическое напряжение?
16. Формула механического напряжения.
17. Сформулировать закон Гука для относительной деформации и механического напряжения.
18. . Формула закона Гука для относительной деформации и механического напряжения.
19. Что такое модуль Юнга.
20. Закон всемирной гравитации.
21. Формула закона всемирной гравитации.
22. Что такое гравитационная постоянная?
23. Что такое сила тяжести?
24. Формула силы тяжести.
25. Что такое вес тела?
26. Формула веса тела, движущегося с постоянной скоростью.
27. Формула веса тела, движущегося с ускорением вверх.
28. Формула веса тела, движущегося с ускорением вниз.

29. Состояние невесомости.

Примеры решения задач.
Задача № 1.

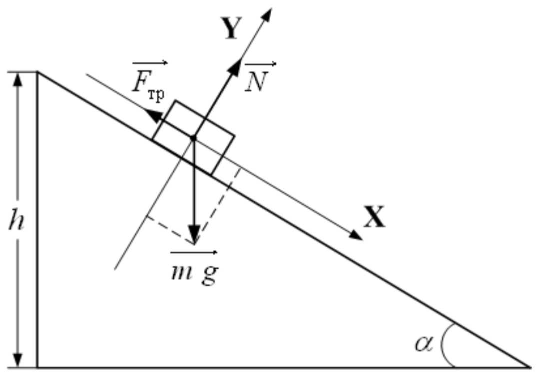
С вершины наклонной плоскости высотой 5 м и углом наклона к горизонту 60° начинает соскальзывать тело массой 2 кг. Определить силу трения, ускорение тела, время его движения по плоскости, скорость тела в конце спуска, если коэффициент трения о плоскость 0,19.

Решение:

Дано:

$m = 2$ кг
$h = 5$ м
$\alpha = 60°$
$\mu = 0{,}19$

$F_{тр}$ - ?
a - ?
υ - ?
t - ?



По второму закону Ньютона $\overrightarrow{ma} = \vec{N} + \overrightarrow{mg} + \vec{F}_{тр}$ (см. пример решения задач к лекции № 1).

Проецируя на оси координат, получим:

на X $\quad ma = mg \cdot \sin\alpha - F_{тр}$ (1)

на Y $\quad N - mg \cdot \cos\alpha = 0$ (2)

По (3.1) $F_{тр} = \mu \cdot N$ (3). По третьему Закону Ньютона – сила, с которой плоскость действует на тело, равна силе, с которой тело действует на плоскость. Таким образом, сила нормального давления равна N .

Из (2) следует: $N = mg \cdot \cos\alpha$. Тогда $F_{тр} = \mu \cdot mg \cdot \cos\alpha$ (4). $F_{тр} \approx$ **1,86 Н.**

Подставляя значение $F_{тр}$ в (1), получим:

$$ma = mg \cdot \sin\alpha - \mu \cdot mg \cdot \cos\alpha \text{ или } ma = mg \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) .$$

Отсюда:

$$a = g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) \quad (5).$$

$a \approx$ **7,56 м/с².**

Из рисунка видно, что длина наклонной плоскости

$$S = \frac{h}{\sin\alpha} ,$$

по (1.9), приняв за начало отсчёта вершину наклонной плоскости, и учитывая, что $\upsilon_0 = 0$,

для S получим: $$S = \frac{a \cdot t^2}{2} .$$

Приравняем правые части последних уравнений: $\dfrac{h}{\sin\alpha} = \dfrac{a \cdot t^2}{2}$.

Подставляя сюда значение a из уравнения (5), получим: $\dfrac{h}{\sin\alpha} = g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) \cdot \dfrac{t^2}{2}$.

Отсюда $$t = \sqrt{\frac{2h}{g \cdot \sin\alpha \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)}} \quad (6).$$

$t \approx$ **1,2 с.**

По (1.8) $\upsilon = a \cdot t$. Учитывая (5) и (6), получим:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2h \cdot g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)}{\sin\alpha}} \text{ или } \upsilon = \sqrt{2h \cdot g \cdot (1 - \mu \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha)} .$$

$\upsilon \approx$ **9,34 м/с.**

Ответ: $F_{тр} \approx$ **1,86 Н;** $a \approx$ **7,56 м/с²;** $t \approx$ **1,2 с** ; $\upsilon \approx$ **9,34 м/с**

Задача № 2.

Период обращения спутника вокруг Земли 90 мин. Определить, на какой высоте движется спутник, скорость его движения, центростремительное ускорение и длину орбиты.

Дано:	СИ
$T = 90$ мин	$5{,}4 \cdot 10^3$ с
h - ?	
υ - ?	
a_n - ?	
ℓ - ?	

Решение:

По закону всемирной гравитации

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2},$$

где $M = 6{,}37 \cdot 10^{24}$ кг – масса Земли, $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м – радиус Земли.

По второму закону Ньютона сила $F = ma$.

Приравнивая правые части, получим:

$$ma = G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2},$$

так как спутник движется по круговой орбите, то a – его центростремительное ускорение.

Таким образом: $a_n = G \cdot \dfrac{M}{(R+h)^2}$ (1).

По (1.14) $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R+h}$ (2), где $(R+h)$ – радиус орбиты спутника.

$$\upsilon = \frac{2\pi \cdot (R+h)}{T} \quad (3),$$

где $2\pi \cdot (R+h) = \ell$ (4) – длина орбиты.

Подставляя значение υ из (3) в уравнение (2), получим:

$$a_n = \frac{4\pi^2 \cdot (R+h)^2}{T^2} \cdot \frac{1}{R+h} \text{ или } a_n = \frac{4\pi^2 \cdot (R+h)}{T^2} \quad (5)$$

Приравнивая правые части (1) и (5), получим

$$\frac{G \cdot M}{(R+h)^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (R+h)}{T^2},$$

отсюда

$$h = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot T^2}{4\pi^2}} - R .$$

$$h \approx 3 \cdot 10^5 \textbf{ м.}$$

Подставляя численные значения в (1), (3), (4), получим:

$$a_n = 9 \textbf{ м/с}^2, \ \upsilon = 7{,}76 \textbf{ м/с}, \ \ell = 42 \cdot 10^6 \textbf{ м.}$$

Ответ: $h \approx 3 \cdot 10^5$ **м;** $a_n = 9$ **м/с^2**, $\upsilon = 7{,}76$ **м/с**, $\ell = 42 \cdot 10^6$ **м.**

Задачи для самостоятельного решения.

9. Масса автомобиля 1 т, коэффициент сопротивления движению 0,1. Найти силу тяги, развиваемую мотором автомобиля, если он движется в гору с углом наклона 20°, с ускорением 0,5 м/с^2.

10. На стальную проволоку длиной 2 м и диаметром 0,5 мм подвесили груз массой 1,5 кг. Удлинение проволоки при этом составило 0,7 мм. Определить механическое напряжение, возникающее в проволоке, её относительное удлинение, модуль Юнга стали.

11. Какой продолжительности должны были бы быть сутки, чтобы тела на экваторе не имели веса?

Лекция № 4.
Давление. Сила Архимеда.

1. **Механическое давление.**
2. **Гидростатическое давление.**
3. **Закон Паскаля. Гидравлический пресс.**
4. **Закон Архимеда.**

1. Механическое давление.

Физическая величина, численно равная отношению силы, действующей перпендикулярно поверхности к площади этой поверхности, называется механическим давлением или просто давлением. $p = \frac{F}{S}$ (4.1) $[Па] = \left[\frac{Н}{м^2}\right]$.

2. Гидростатическое давление.

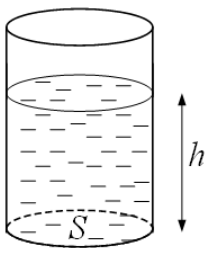


Рис.4.1

Жидкость, находящаяся в сосуде, оказывает на него давление. Давление, обусловленное весом жидкости, называют гидростатическим.

Определим давление, создаваемое жидкостью на дно сосуда (рис. 4.1).

По определению давление $p = \frac{F}{S}$, где $F = mg$ – вес жидкости. Тогда $p = \frac{mg}{S}$, но $m = \rho \cdot V$, V – объём жидкости в сосуде. Как видно $V = S \cdot h$. Учитывая сказанное для давления можно получить:

$$p = \rho \cdot g \cdot h \ (4.2).$$

Таким образом давление жидкости зависит только от высоты её столба и от рода жидкости и не зависит от площади поверхности, на которую действует жидкость.

3. Закон Паскаля. Гидравлический пресс.

Закон Паскаля гласит: ***Давление, оказываемое на жидкость или газ, распространяется во все стороны без изменения.***

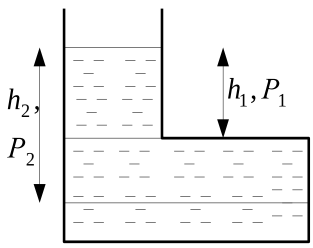


Рис.4.2

На рис. 4.2 изображён сосуд сложной геометрической формы. На глубине h_1, давление создаётся столбом жидкости высотой h_1. Так как это давление распространяется без изменения, то давление в правой части сосуда равно давлению в левой. То же самое касается глубины h_2.

Закон Паскаля позволяет объяснить работу гидравлического

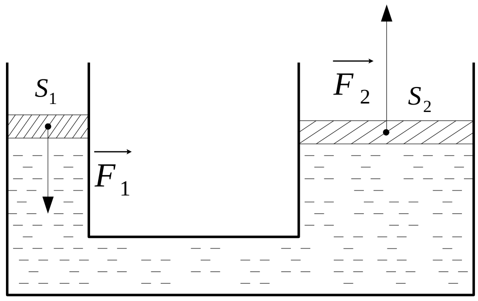


Рис.4.3

пресса – устройства, изображённого на рис. 4.3. Сила $\vec{F_1}$, действующая на поршень S_1, оказывает на него давление $p = \frac{F_1}{S_1}$. По закону Паскаля это давление, распространяясь по жидкости, действует и на поршень S_2, но теперь $p = \frac{F_2}{S_2}$. Приравнивая правые части, можно получить $\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}$. Сила, действующая на большой поршень, во столько раз больше силы, действующей на малый поршень, во сколько раз площадь большого поршня больше площади малого поршня.

4. Закон Архимеда.

Рассмотрим тело, находящееся внутри жидкости (рис. 4.4). Для простоты рассмотрим параллелепипед.

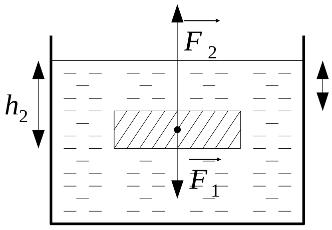


Рис.4.4

По закону Паскаля жидкость оказывает давление на его верхнюю грань $p_1 = \rho \cdot g \cdot h_1$, а на нижнюю – $p_2 = \rho \cdot g \cdot h_2$. Таким образом, давление на верхнюю грань оказывается меньшим, чем давление на нижнюю грань. За счёт разницы давлений на тело действует выталкивающая сила $F = F_2 - F_1$. Учитывая (4.1) и (4.2) можно получить: $F = \rho \cdot V \cdot g$ (4.3), где ρ – плотность жидкости; V – объём вытесненной телом жидкости. Учитывая (2.1) и то, что объём вытесненной телом жидкости равен объёму тела – получим: $F = mg$ (4.4), где m – масса вытесненной жидкости. Опыт показывает, что формулы (4.3), (4.4) определяют выталкивающую силу, действующую на тела произвольной формы. Закон Архимеда гласит:

На тело, погружённое в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости или газа.

Вопросы для самоконтроля.

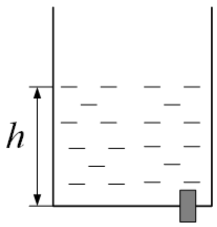
1. Что такое механическое давление?
2. Формула механического давления.
3. Что такое гидростатическое давление?
4. Формула гидростатического давления.
5. Структурно–логическая схема вывода формулы гидростатического давления.
6. Сформулировать закон Паскаля.
7. Физические основы работы гидравлического пресса.
8. Сформулировать закон Архимеда.
9. Структурно–логическая схема вывода формулы выталкивающей силы.

Примеры решения задач.

Задача № 1.

Отверстие в дне нефтяного бака закрыть пробкой, площадь основания которой 10 см^2. Чтобы выдавить пробку к ней нужно приложить усилие 16 Н. До какой высоты можно наливать нефть в бак, если плотность нефти 800 кг/м^3?

Дано:	СИ
S = 10 см^2	10^{-3} м^2
F =16 Н	
ρ =800 кг/м^3	
h - ?	



Решение:

Давление, оказываемое нефтью на пробку, не должно превышать значения $p = \frac{F}{S}$. По (4.2) это давление $p = \rho \cdot g \cdot h$. Приравнивая правые части, получим: $\frac{F}{S} = \rho \cdot g \cdot h$.

Отсюда: $h = \frac{F}{\rho \cdot g \cdot S}$.

$h \approx$ **2,08 м.**

Ответ: $h \approx$ **2,08 м.**

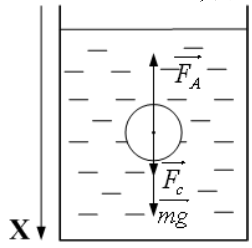
Задача № 2.

Шарик всплывает в жидкости, плотность которой в 4 раза больше плотности шарика, с постоянной скоростью. Во сколько раз сила сопротивления движению шарика в жидкости больше силы тяжести, действующей на него?

Дано:

$\rho_ж = 4\rho_ш$

$\dfrac{F_c}{mg}$ - ?



Решение:

Так как шарик движется с постоянной скоростью, то по первому закону Ньютона

$$\vec{F_A} + \vec{mg} + \vec{F_c} = 0.$$

Направим ось X в сторону действия большего числа сил. Тогда в проекциях на ось X получим:

$$mg + F_c - F_A = 0 \ (1).$$

По (2.1) $m = \rho_ш \cdot V$.

Тогда $mg = \rho_ш \cdot V \cdot g$ (2).

По (4.3) $F_A = \rho_ж \cdot V \cdot g$ или, учитывая условие задачи $F_A = 4\rho_ш \cdot V \cdot g$.

Подставляя значение mg и F_A в уравнение (1) получим:

$$\rho_ш \cdot V \cdot g + F_c - 4\rho_ш \cdot V \cdot g = 0.$$

Отсюда $F_c = 4\rho_ш \cdot V \cdot g - \rho_ш \cdot V \cdot g$;

$$F_c = 3\rho_ш \cdot V \cdot g.$$

Учитывая (2), получим:

$$\frac{F_c}{mg} = \frac{3\rho_ш \cdot V \cdot g}{\rho_ш \cdot V \cdot g} = 3.$$

Ответ: в 3 раза.

Задачи для самостоятельного решения.

12. На какой глубине давление воды в 3 раза больше атмосферного, равного 10^5 кПа?

13. К малому поршню гидравлического пресса приложена сила 10 Н, под действием которой за один ход он опускается на 25 см, в следствие чего большой поршень поднимается на 5 мм. Какая сила давления передаётся при этом на большой поршень?

14. Кусок парафина в форме параллелепипеда толщиной 5 см плавает в воде. Какая часть этого куска выступает над водой?

Лекция № 5.
Работа и энергия.

1. **Механическая работа.**
2. **Мощность.**
3. **Кинетическая энергия.**
4. **Потенциальная энергия.**

1. Механическая работа.

Физическая величина, равная скалярному произведению силы, действующей на тело, на перемещение, совершаемое под действием этой силы, называется механической работой.

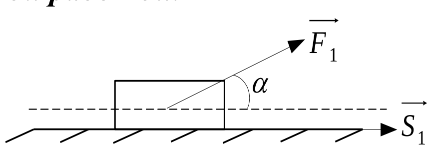


Рис.5.1

$A = \left(\vec{F} \cdot \vec{S}\right)$ или $A = F \cdot S \cdot \cos\alpha$ (5.1), где α – угол между направлениями силы и перемещения (рис. 5.1). На основании формулы (5.1) вводится единица измерения механической работы в системе СИ: $[Дж] = [Н \cdot м]$. Если под действием силы в 1 Н, действующей параллельно перемещению тела, оно совершает перемещение 1 *м*, то сила совершает работу в 1 Джоуль.

Если работа совершается переменной силой, то можно говорить об элементарной работе, совершаемой на бесконечно малом участке пути длиной dS. Тогда: $dA = F \cdot dS$ (5.2), где сила F является функцией перемещения. Тогда полная работа на всём пути будет:

$$A = \int F \cdot dS \quad (5.3).$$

2. Мощность.

Физическая величина, показывающая как быстро совершается механическая работа, (т.е., показывающая скорость совершения работы – работу, совершаемую в единицу времени) называется мощностью. $\langle N \rangle = \dfrac{A}{t}$ (5.4) – средняя мощность.

$$N = \frac{dA}{dt} \text{ (5.5) – мгновенная мощность.}$$

На основании (5.4) вводится единица измерения мощности Ватт. $[\text{Вт}] = \left[\dfrac{Дж}{с}\right]$.

Если некоторый механизм за 1 секунду совершает работу в 1 Джоуль, то он обладает мощностью 1 Ватт.

Пусть под действием постоянной силы $\vec{F}$ тело движется с постоянной скоростью $\vec{\upsilon}$, причём $\vec{F}$ сонаправлена с $\vec{\upsilon}$. Тогда: по (5.1) $A = F \cdot S$. Тогда: $N = \dfrac{F \cdot S}{t}$. Учитывая (1.1), (1.2), получим: $N = F \cdot \upsilon$ (5.6).

Из (5.6) следует $F = \dfrac{N}{\upsilon}$ (5.7). При одной и той же мощности сила тяги тем больше, чем меньше скорость движения. Поэтому подниматься в гору легче медленно.

3. Кинетическая энергия.

Энергия – универсальная мера взаимодействия и движения всех видов материи.

С различными формами материи связывают различные виды энергии: механическую, внутреннюю, электромагнитную и т.д.

Механическая энергия показывает какую механическую работу может совершить тело.

Кинетической называется энергия, которой обладают движущиеся тела.

Пусть под действием постоянной силы $\vec{F}$ тело совершает равноускоренное движение, причём векторы силы и перемещения сонаправлены. Тогда по (5.1) $A = F \cdot S$. По второму закону Ньютона (2.8) $F = ma$. По (1.9) $S = \upsilon_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$. По (1.6) $a = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t}$. Подставляя в (5.1) значения F, S, a, получим $A = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^{\ 2}}{2}$ (5.8)

Физическая величина $E_k = \frac{m\upsilon^2}{2}$ (5.9) и есть кинетическая энергия тела.

Учитывая (5.9) уравнению (5.8) можно придать вид: $A = E_k - E_{k0} = \Delta E_k$ (5.10) – ***работа силы равна изменению кинетической энергии тела.*** Это утверждение получило название теоремы о кинетической энергии.

Опыт показывает, что теорема о кинетической энергии справедлива для любых сил и любого движения.

4. Потенциальная энергия.

Определим работу, совершаемую силой тяжести по перемещению свободно падающего тела от положения h_1 до положения h_2 (рис. 5.2)

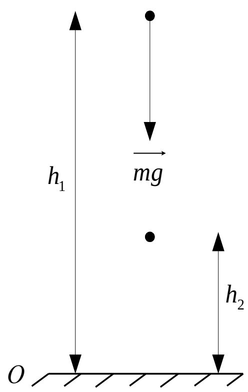


рис.5.2

Так как сила тяжести и перемещение тела сонаправлены, то по (5.1) и (3.8) $A = mg \cdot (h_2 - h_1)$. Сила тяжести и перемещение сонаправлены, но $h_2 < h_1$, значит $(h_2 - h_1) < 0$. Чтобы избежать этого противоречия, работе силы тяжести нужно придать вид: $A = -mg \cdot (h_2 - h_1)$ или $A = -(mgh_2 - mgh_1)$ (5.11).

Физическая величина $E_p = mgh$ (5.12), показывающая какую работу может совершить тело, поднятое над землёй, называется потенциальной энергией.

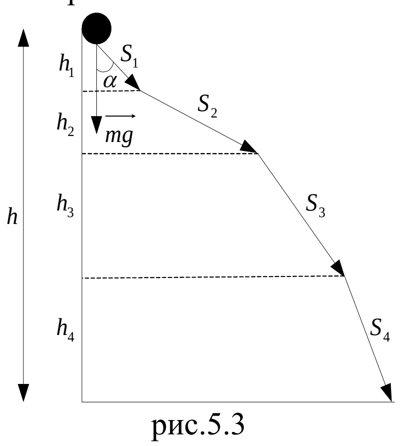


рис.5.3

Учитывая (5.12), (5.11) примет вид: $A = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p$ (5.13).

Рассмотрим тело, скатывающееся без трения по поверхности, изображённой на рис. 5.3.

Так как тело движется под действием силы тяжести, то работа на участке S_1 будет: $A_1 = mg \cdot S_1 \cdot \cos\alpha_1$

На остальных участках соответственно:

$A_2 = mg \cdot S_2 \cdot \cos\alpha_2$

$A_3 = mg \cdot S_3 \cdot \cos\alpha_3$

$A_4 = mg \cdot S_4 \cdot \cos\alpha_4$

Тогда полная работа на всём пути будет: $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$. Из рисунка видно, что $S_i \cdot \cos\alpha_i = h_i$. Поэтому для полной работы можно получить: $A = mg \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$, но $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = h$. Таким образом и в этом случае полная работа будет: $A = -(0 - mgh)$ или $A = mgh = -\Delta E_p$. Из приведённых примеров следует, что работа силы тяжести не зависит от формы траектории тела и равна изменению его потенциальной энергии, взятому с обратным знаком.

Сила тяжести создаётся гравитационным полем (полем притяжения Земли). Поля, работа сил которых не зависит от формы траектории, а равна изменению потенциальной энергии, взятому с обратным знаком, называются потенциальными полями.

Вопросы для самоконтроля.

1. Что такое механическая работа?
2. Формула работы постоянной силы.
3. Формула работы переменной силы.
4. Что такое мощность?
5. Формулы средней и мгновенной мощности.
6. Структурно–логическая схема вывода формулы мощности, при движении с постоянной скоростью.
7. Что такое кинетическая энергия?
8. Теорема о кинетической энергии.
9. Структурно–логическая схема вывода теоремы о кинетической энергии.
10. Что такое потенциальная энергия?
11. Формула потенциальной энергии.
12. Какие поля называются постоянными?

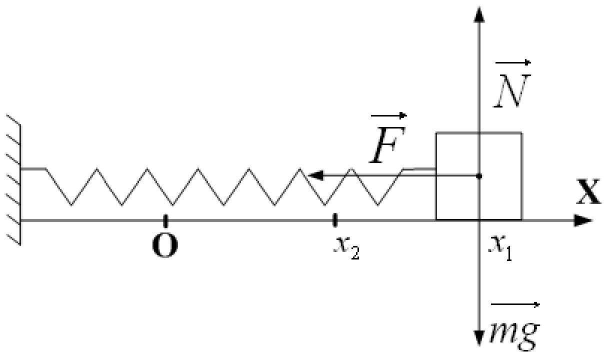
Пример решения задач.

Задача № 1.

Тело массой 0,1 кг, лежащее на горизонтальной поверхности, прикреплено к пружине жёсткостью k =100 Н/м. Пружина растянута на 10 см. Определить работу силы упругости по перемещению тела на 5 см от начального, а также значения потенциальной энергии пружины, кинетической энергии тела и его скорости на расстоянии 5 см от положения равновесия. Трением пренебречь.

Дано:	СИ
m = 0,1 кг	
k =100 Н/м	
x_1= 10 см	0,1 м
x_2= 5 см	0,05 м
A - ?	
E_{p2} - ?	
$E_{к2}$ - ?	
υ_2 - ?	

Решение:



По (5.2), учитывая, что $dS = dx$, получим $A = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx$.

Так как сила тяжести $\overrightarrow{mg}$ и реакции опоры $\vec{N}$ перпендикулярны направлению движения, то по (5.1) они работы не совершают. Работу совершает только сила упругости.

По закону Гука (см. 3.2) $F = -k \cdot x$. Тогда: $A = \int_{x_1}^{x_2} (-k \cdot x) \cdot dx = -k \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2}$. Подставляя пределы интегрирования, работе силы упругости можно придать вид: $A = -\left(\frac{k \cdot x_2^2}{2} - \frac{k \cdot x_1^2}{2} \right)$ (1).

Работа силы упругости равна изменению величины $\frac{k \cdot x^2}{2}$, взятой с обратным знаком.

По (5.10) работа силы тяжести равна изменению величины mgh , взятой с обратным знаком. Величина mgh при этом называется потенциальной энергией тела, поднятого над Землёй.

Величина $E_p = \dfrac{k \cdot x^2}{2}$ (2), называется потенциальной энергией упруго деформированного тела. Таким образом:

По (1) A **= 0,375 Дж**.

По (2) $E_{p2} = \dfrac{k \cdot x_2^2}{2}$; $E_{p2} =$ **0,125 Дж.**

По теореме о кинетической энергии (см.5.10) $A = E_{к2} - E_{к1}$. В положении x_1 скорость тела равна нулю. Значит $E_{к1} = 0$, значит $E_{к2} = A$; $E_{к2} =$ **0,375 Дж**.

По (5.8) $E_{к2} = \dfrac{m\upsilon_2^2}{2}$. Отсюда: $\upsilon_2 = \sqrt{\dfrac{2E_{к2}}{m}}$; $\upsilon_2 \approx$ **2,74 м/с.**

Ответ: A **= 0,375 Дж;** $E_{p2} =$ **0,125 Дж;** $E_{к2} =$ **0,375 Дж;** $\upsilon_2 \approx$ **2,74 м/с.**

Задачи для самостоятельного решения.

15. К катящемуся по горизонтальной поверхности шару массой 1 кг приложили силу 1 Н и остановили его. Тормозной путь составил 1 м. Определить скорость шара до начала торможения.

16. Коэффициент трения между некоторым телом и плоскостью, наклонённой под углом 45° к горизонту, равен 0,2. На какую высоту поднимается это тело, скользя по наклонной плоскости, если ему будет сообщена скорость 10 м/с, направленная вверх вдоль плоскости? Какова будет скорость тела, когда оно вернётся в нижнюю исходную точку своего движения?

Лекция № 6.
Динамика твёрдого тела.

1. Центр масс. Движение твёрдого тела.
2. Момент силы относительно точки и оси.
3. Пара сил. Момент пары сил.
4. Момент импульса материальной точки и твёрдого тела.
5. Момент инерции материальной точки и твёрдого тела. Теорема Штейнера.
6. Основное уравнение динамики вращательного движения.
7. Работа и мощность во вращательном движении.

1. Центр масс. Движение твёрдого тела.

Любое твёрдое тело можно представить в виде совокупности материальных точек.

Абсолютно твёрдым называется тело, у которого взаимное расположение точек не меняется ни при каких воздействиях на него.

Центром масс называется точка тела, движущаяся так, как двигалась бы материальная точка, обладающая массой данного тела, под действием всех сил, приложенных к этому телу.

В кинематике рассматривается два основных вида движения – поступательное и вращательное.

При поступательном движении все точки тела движутся одинаково. Поэтому для описания такого движения достаточно определить как движется одна точка тела.

При вращательном – все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения. Для описания такого движения нужно задать положение оси вращения в пространстве и угловую скорость вращения в данный момент времени.

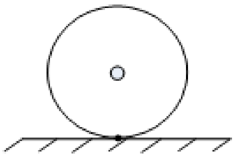


рис.6.1

Любое движение можно представить как наложение двух основных видов движения. Например качение цилиндра. Это движение можно представить как поступательное движение его центра масс и вращательное движение всех других точек.

Элементарное перемещение твёрдого тела dS можно представить в виде $dS = dS_{\text{п}} + dS_{\text{в}}$, где $dS_{\text{п}}$ одинаково для всех точек тела, $dS_{\text{в}}$ – поворот вокруг некоторой оси вращения, называемой мгновенной осью вращения. Эта ось может лежать в пределах тела, либо вне его. При качении цилиндра по плоскости, мгновенная ось совпадает с точкой касания цилиндра и плоскости. (Рис. 6.1). Разделив dS на dt получим: $\frac{dS}{dt} = \frac{dS_{\text{п}}}{dt} + \frac{dS_{\text{в}}}{dt}$ или $\upsilon = \upsilon_{п} + \upsilon_{в}$, где $\upsilon_{п}$ – одинаковая скорость поступательного движения для всех точек тела; $\upsilon_{в}$ – различная скорость точек, обусловленная вращением.

2. Момент силы относительно точки и оси.

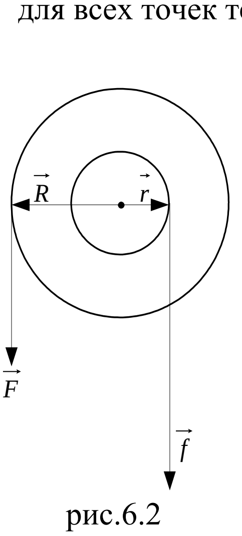


рис.6.2

Рассмотрим диск вращающийся вокруг оси, проходящей через его центр масс (рис. 6.2). Пусть это движение происходит под действием двух сил $\vec{F}$ и $\vec{f}$. Опыт показывает, что эта система будет находиться в состоянии равновесия (то есть в состоянии равномерного вращения или покоя), при соблюдении условия: $\vec{R} \cdot \vec{F} = \vec{r} \cdot \vec{f}$ (6.1).

Физическая величина $\vec{M} = \vec{R} \cdot \vec{F}$ (6.2) называется моментом силы.

Рассмотрим движение i–той материальной точки диска, вращающейся вокруг точки O под действием силы $\vec{F}$ (рис. 6.3). Запишем II закон

Ньютона для этой точки: $\frac{d\overrightarrow{p_i}}{dt} = \vec{F}$. Умножив обе части равенства на r_i, получим: $\vec{r_i} \cdot \frac{d\overrightarrow{p_i}}{dt} = \vec{r_i} \cdot \vec{F}$ (6.3).

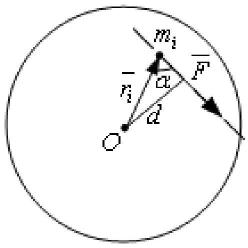


рис.6.3

Правая часть (6.3) представляет собой момент силы $\vec{F}$ относительно точки О. $\overrightarrow{M} = \vec{r_i} \cdot \vec{F}$. Направление вектора $\overrightarrow{M}$ перпендикулярно плоскости чертежа и определяется правилом правого винта:

Если правый винт закручивать таким образом, чтобы элементарное поступательное движение конца вектора $\vec{r_i}$ было направлено по направлению $\vec{F}$, то поступательное движение винта покажет направление вектора $\overrightarrow{M}$.

Итак: момент силы М относительно точки О равен векторному произведению $\vec{r}$ на $\vec{F}$. Значение векторного произведения определяется формулой: $M = r \cdot F \cdot \sin\alpha$ (6.4), где α – угол между $\vec{r}$ и линией действия силы $\vec{F}$. Из рис. 6.3 видно, что $r \cdot \sin\alpha = d$.

Кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы называется плечом силы.

Используя понятие плеча силы, уравнению (6.4) можно придать вид $M = d \cdot F$ (6.5).

Направление силы $\vec{F}$ может не совпадать с плоскостью вращения тела.

Проекция вектора момента силы на ось вращения тела Z называется моментом силы относительно оси. Его значение определяется формулой: $M_Z = M \cdot cos\beta$ (6.6), где β – угол между $\overrightarrow{M}$ и Z.

Используя понятие момента силы условию равновесия можно придать вид:

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_i} = 0 \quad (6.7).$$

3. Пара сил. Момент пары сил.

Две равные по модулю, направленные в противоположные стороны силы, приложенные к одному телу, называются парой сил. (Рис. 6.4.)

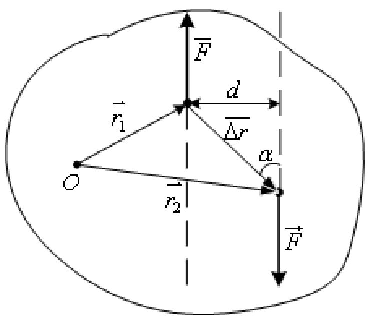


рис.6.4

Под действием пары сил тело перемещаться не может, но будет поворачиваться относительно некоторой оси О до тех пор, пока линии действия сил не совпадут.

Величина $M = \Delta r \cdot F$, где $\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$ называется моментом пары сил, значение которого определяется формулой $M = \Delta r \cdot F \cdot \sin\alpha$, где α – угол между линией действия силы $\vec{F}$ и $\overrightarrow{\Delta r}$. Из рис. 6.4. видно, что $\Delta r \cdot \sin\alpha = d$ – кратчайшее расстояние между линиями действия пары сил называется плечом пары сил.

4. Момент импульса материальной точки и твёрдого тела.

Рассмотрим левую часть уравнения (6.3). Так как r_i не зависит от времени, его можно внести под знак производной $\frac{d}{dt} \cdot (\vec{r_i} \cdot \overrightarrow{p_i}) = \vec{r_i} \cdot \vec{F_i}$. Физическая величина $\overrightarrow{L_i} = \left[\vec{r_i} \cdot \overrightarrow{p_i}\right]$ (6.8) называется моментом импульса материальной точки относительно точки, вокруг которой происходит вращение.

Физическая величина $L_{Zi} = L_i \cdot \cos\beta$ (6.9) – есть момент импульса точки относительно оси Z, где β – угол между осью $\vec{Z}$ и $\vec{L}$.

Величина $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L_i}$ (6.10) называется моментом импульса твёрдого тела.

5. Момент инерции материальной точки и твёрдого тела. Теорема Штейнера.

Учитывая, что $p = m\upsilon$ (см. 2.4) и что, $\upsilon = \omega \cdot r$ (см. 1.17) уравнению (6.8) можно придать вид: $L_i = r_i \cdot m_i \cdot \omega \cdot r_i$ или $L = m_i \cdot r_i^2 \omega$. Физическая величина

$$I_i = m_i \cdot r_i^2 \quad (6.11)$$

называется моментом инерции материальной точки, а физическая величина $I = \sum_{i=1}^{n} I_i$ (6.12) – моментом инерции твёрдого тела.

Любое твёрдое тело можно разбить на элементарные массы $dm = \rho \cdot dV$. Тогда момент инерции твёрдого тела может быть определён по формуле: $I = \int_V \rho \cdot r^2 \cdot dV$ (6.13), где интегрирование ведётся по всему объёму тела.

В качестве примера определим момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через центр масс C (рис. 6.5). Выделим на стержне бесконечно малый элемент длиной dr, расположенный на расстоянии r от центра масс стержня. Тогда: $dV = S \cdot dr$, где S – площадь поперечного сечения стержня. Подставляя значение dV в (6.13), получим: $I = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \rho \cdot r^2 \cdot S \cdot dr$, так как ρ и S величины постоянные, их можно вынести за знак интеграла, тогда интегрируя получим: $I = \rho \cdot S \cdot \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} r^2 \cdot dr = \frac{\rho \cdot S \cdot \ell^3}{12}$.

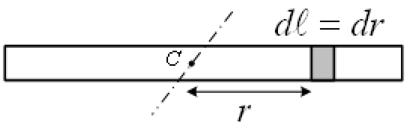


рис.6.5

Или, учитывая, что $S \cdot \ell = V$ получим: $I = \frac{\rho \cdot V \cdot \ell^2}{12}$, но $\rho \cdot V = m$, тогда

$$I = \frac{m \cdot \ell^2}{12} \quad (6.14).$$

Аналогично рассчитываются моменты инерций других тел правильной геометрической формы. Без вывода приведём примеры некоторых из них:

Диск или цилиндр радиуса r $\quad I = \frac{m \cdot r^2}{2}$ (6.15.)

Тонкий обруч, кольцо, полый цилиндр $\quad I = m \cdot r^2$ (6.16)

Шар, радиусом r $\quad I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$ (6.17)

Момент инерции тела зависит от оси вращения. Для определения момента инерции тела относительно оси, не проходящей через центр масс, пользуются теоремой Гюйгенса – Штейнера:

Момент инерции твёрдого тела, относительно оси не проходящей через центр масс, равен сумме момента инерции этого тела относительно оси, проходящей через центр масс и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями. (Рис. 6.6.)

$$I = I_C + m\cdot d^2 \quad (6.18.)$$

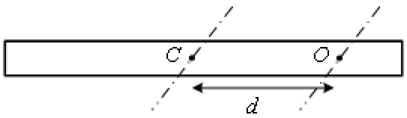


рис.6.6

Для доказательства теоремы Штейнера определим момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через один из его концов. Для этого в предыдущем примере нужно изменить пределы интегрирования.

Тогда: $I = \int_0^{\ell} \rho \cdot S \cdot r^2 d\ell = \dfrac{m\cdot \ell^2}{3}$.

По теореме Штейнера, учитывая, что $I_C = \dfrac{m\cdot\ell^2}{12}$ и $d = \dfrac{\ell}{2}$

$$I = \frac{m\cdot\ell^2}{12} + m\cdot\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{m\cdot\ell^2}{3}$$

6. Основное уравнение динамики вращательного движения.

Проводя аналогию между поступательным и вращательным движением, запишем второй закон Ньютона для вращательного движения: $\vec{F} = \dfrac{\overrightarrow{dp}}{dt}$ —— $\vec{M} = \dfrac{\overrightarrow{dL}}{dt}$ (6.19.).

Так как $L = I\cdot\omega$, то (6.19.) примет вид: $M = \dfrac{d}{dt}(I\cdot\omega)$ или $M = I\dfrac{d\omega}{dt}$, но $\dfrac{d\omega}{dt} = \varepsilon$, тогда

$$M = I\cdot\varepsilon \quad (6.20.) –$$

основное уравнение динамики вращательного движения, или второй закон Ньютона для вращательного движения.

Из сравнения II закона Ньютона для поступательного движения $F = m\cdot\dfrac{d\upsilon}{dt}$ и вращательного $M = I\cdot\dfrac{d\omega}{dt}$ вытекает физический смысл момента инерции тела. ***Во вращательном движении он играет ту же роль, что и масса в поступательном, то есть является мерой инертности вращающихся тел.***

7. Работа и мощность во вращательном движении. Кинетическая энергия вращающегося тела.

Рассмотрим движение точек 1 и 2 твёрдого тела, вращающегося относительно оси Z.

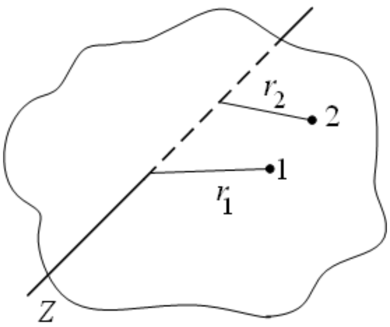


рис.6.7

Они будут иметь различные линейные скорости υ_1 и υ_2, но одинаковую угловую скорость ω. Кинетическая энергия любой точки тела определяется формулой: $W_{ki} = \dfrac{m_i\upsilon_i^2}{2}$ или, учитывая, что $\upsilon_i = \omega\cdot r_i$ – $W_{ki} = \dfrac{m_i\cdot\omega^2\cdot r_i^2}{2}$, то $m_i\cdot r_i^2 = I_i$ тогда: $W_{ki} = \dfrac{I_i\cdot\omega^2}{2}$. Тогда кинетическая энергия всего тела будет: $W_k = \sum_{i=1}^{n} W_k = \sum_{i=1}^{n}\dfrac{I_i\cdot\omega^2}{2} = \dfrac{\omega}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n} I_i$. Итак

$$W_k = \frac{I\cdot\omega^2}{2} \quad (6.21).$$

К этому же результату можно было придти, проводя аналогию между поступательным и вращательным движением.

Поступательное	Вращательное
Для работы:	
$A = F \cdot S$	$A = M \cdot \varphi$
Для мощности	
$N = F \cdot \upsilon$	$N = M \cdot \omega$
По теореме о кинетической энергии	
$A = \frac{m\upsilon_k^2}{2} - \frac{m\upsilon_н^2}{2}$	$A = \frac{I\omega_k^2}{2} - \frac{I\omega_н^2}{2}$
Кинетическая энергия	
$E_k = \frac{m\upsilon^2}{2}$	$E_k = \frac{I\omega^2}{2}$

Вопросы для самоконтроля.

1. Что такое центр масс?
2. Что такое момент силы?
3. Формула момента силы.
4. Правило правого винта для определения направления момента силы.
5. Условие равновесия.
6. Что такое пара сил?
7. Формула момента пары сил.
8. Что такое момент импульса материальной точки?
9. Что такое момент импульса твёрдого тела?
10. Что такое момент инерции материальной точки?
11. Что такое момент инерции твёрдого тела?
12. Формула момента инерции материальной точки.
13. Структурно–логическая схема вывода формулы момента инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через центр масс.
14. Формула момента инерции однородного диска относительно оси, проходящей через центр масс.
15. Формула момента инерции однородного тонкого кольца относительно оси, проходящей через центр масс.
16. Формула момента инерции однородного шара относительно оси, проходящей через центр масс.
17. Теорема Гюйгенса–Штейнера.
18. Основное уравнение динамики вращательного движения.

Примеры решения задач.

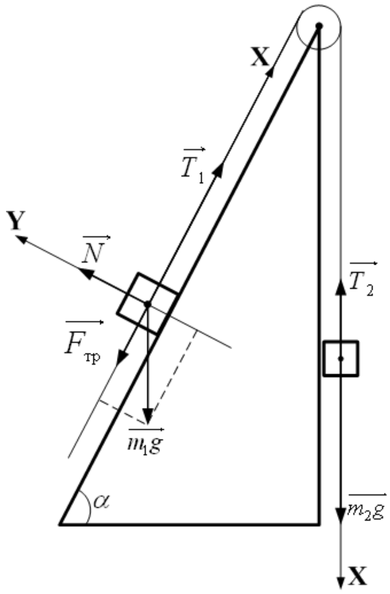
Задача № 1.

На вершине наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол 60°, закреплён блок в виде сплошного диска радиусом 5 см и массой 100 г. Через блок перекинута лёгкая нить к концам которой прикреплены грузы массами m_1 = 1 кг и m_2 = 2 кг. Коэффициент трения между первым грузом и наклонной плоскостью μ = 0,1. Трением в блоке пренебречь.

Определить: момент инерции блока; вращательный момент сил, действующих на блок; угловое ускорение блока, ускорение грузов, силу натяжения нитей по обе стороны блока, силу трения между грузом и плоскостью, и угловую скорость вращения блока через 0,1 с после начала движения.

Дано:	СИ
$\alpha = 60°$	
$R = 5$ см	$5 \cdot 10^{-2}$ м
$m = 100$ г	0,1 кг
$m_1 = 1$ кг	
$m_2 = 2$ кг	
$\mu = 0{,}1$	
$t = 0{,}1$ с	
I - ?	
M - ?	
ε - ?	
T_1 - ?	
T_2 - ?	
$F_{\text{тр}}$ - ?	
$\omega(t)$ - ?	

Решение:



По (6.14) момент инерции однородного диска $I = \dfrac{m \cdot R^2}{2}$;

$I = 1{,}25 \cdot 10^{-4}$ кг $\cdot$ м^2

По (6.6), учитывая, что вращательный момент создают силы T_1 и T_2 $M = (T_1 - T_2) \cdot R$ (1).

В отличие от задачи к лекции №1 – блок обладает массой, а следовательно и инертными свойствами. Это значит, что он влияет на движение грузов. Поэтому силы натяжения нити по разные стороны блока будут различными.

Запишем второй закон Ньютона для всех тел участвующих в движении.

Для первого тела: $\vec{T_1} + \vec{m_1 g} + \vec{F_{mp}} + \vec{N} = \vec{m_1 a}$ (2)

Для второго тела: $\vec{T_2} + \vec{m_2 g} = \vec{m_2 a}$ (3)

Для блока $M = I \cdot \varepsilon$ (4) или, учитывая, (6.14) и (1), получим: $(T_1 - T_2) \cdot R = \dfrac{m \cdot R^2}{2} \cdot \varepsilon$. По (1.23) $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$. Тогда: $(T_1 - T_2) \cdot R = \dfrac{mR^2}{2} \cdot \dfrac{a}{R}$ или, сокращая на R –

$T_1 - T_2 = \dfrac{ma}{2}$ (5).

Проецируя уравнение (2) и (3) на оси X, получим:

$T_1 - m_1 g \cdot \sin\alpha - F_{\text{тр}} = m_1 a$ (6)

$m_2 g - T_2 = m_2 a$ (7).

Сложим полученные уравнения: $T_1 - T_2 - m_1 g \cdot \sin\alpha + m_2 g - F_{\text{тр}} = m_1 a + m_2 a$

или, учитывая (5): $\dfrac{ma}{2} - g \cdot (m_1 \cdot \sin\alpha - m_2) - F_{mp} = a \cdot (m_1 + m_2)$.

Отсюда: $a = \dfrac{g \cdot (m_1 \cdot \sin\alpha - m_2) + F_{mp}}{\dfrac{m}{2} - (m_1 + m_2)}$ (8).

По определению $F_{mp} = \mu \cdot N$. Проецируя (2) на ось Y, получим: $N - m_1 g \cdot \cos\alpha = 0$. Отсюда: $N = m_1 g \cdot \cos\alpha$. Тогда $F_{mp} = \mu \cdot m_1 g \cdot \cos\alpha$. $F_{mp} =$ **0,49 Н.**

Подставляя численные значения в (8), найдём значение ускорения $a \approx 3{,}6$ м/с^2.

Из (7) следует: $T_2 = m_2 \cdot (g - a)$. $T_2 =$ **12,4 Н.**

Из (5) следует: $T_1 = T_2 + \dfrac{ma}{2}$. $T_1 =$ **12,58 Н.**

Подставляя численные значения в (1), найдём вращательный момент:

$$M = 9 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Из (4) следует: $\varepsilon = \dfrac{M}{I}$; $\varepsilon =$ **72 рад/с²**.

Угловая скорость при равноускоренном вращении $\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$. Так как $\omega_0 = 0$, то

$\omega =$ **7,2 рад/с.**

Ответ: $I = 1{,}25 \cdot 10^{-4}$ кг · м²; $F_{тр} =$ **0,49 Н;** $T_2 =$ **12,4 Н;** $T_1 =$ **12,58 Н;** $M = 9 \cdot 10^{-3}$ Н · м; $\varepsilon =$ **72 рад/с²;** $\omega =$ **7,2 рад/с.**

Задачи для самостоятельного решения.

17. Блок, имеющий форму диска, массой 0,4 кг вращается под действием силы натяжения нити, к концам которой подвешены грузы массой 0,3 кг и 0,7 кг. Определить силу натяжения нити по обе стороны блока.

18. Однородный диск радиусом 0,2 м и массой 5 кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр масс по закону $\varphi = 5t + 8t^2$. Найти величину силы, действующей на диск и угловое ускорение диска.

19. Тонкий однородный стержень длиной 50 см и массой 400 г вращается с угловым ускорением 3 с$^{-1}$ вокруг оси, проходящей через один из его концов. Определить момент инерции стержня и вращательный момент сил, действующих на него.

Лекция № 7.
Законы сохранения в механике.

1. **Закон сохранения импульса. Реактивное движение.**
2. **Закон сохранения момента импульса.**
3. **Закон сохранения полной механической энергии.**

1. Закон сохранения импульса. Реактивное движение.

Рассмотрим систему, состоящую из двух тел, взаимодействующих друг с другом. Запишем II закон Ньютона для каждого из них:

$$\frac{d\overrightarrow{p_1}}{dt} = \overrightarrow{F_{12}} \ (7.1.) \quad \frac{d\overrightarrow{p_2}}{dt} = \overrightarrow{F_{21}} \ (7.2.)$$

По III закону Ньютона $\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}}$, тогда просуммировав (7.1.) и (7.2.) получим: $\frac{d\overrightarrow{p_1}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{p_2}}{dt} = 0$. Знак дифференциала можно вынести за скобки. Тогда: $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}) = 0$. Таким образом, первая производная суммы импульсов взаимодействующих тел, равна нулю, а это значит, что сумма импульсов величина постоянная.

Опыт показывает, что последнее равенство справедливо для любого числа взаимодействующих тел, образующих замкнутую систему: $\frac{d}{dt} \cdot \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_i} = 0$ (7.3.).

Величина $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_i}$ называется импульсом взаимодействующих тел. Уравнение (7.3.) является математической формой записи закона сохранения импульса, который гласит:

Импульс замкнутой системы тел есть величина постоянная.

Для решения задач удобно пользоваться следующей формулировкой этого закона:

Сумма импульсов замкнутой системы тел до взаимодействия равна сумме импульсов этих тел после взаимодействия.

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_i} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_i} \qquad (7.4.)$$

Закон сохранения импульса находит широкое отражение в науке и технике. Например при выстреле из орудия, неизбежно происходит его откат. Определяющую роль в этом явлении играет сила взаимодействия снаряда и орудия. Она значительно превосходит силы сопротивления и тяготения, действующие на снаряд при выстреле. Поэтому систему снаряд – орудие можно считать замкнутой и применить к ней закон сохранения импульса.

Из (2.4.), (7.4.) с учётом, что до выстрела скорости снаряда и орудия равны нулю – следует: $m \cdot \upsilon = M \cdot \upsilon_0$, где m, υ – масса и скорость снаряда; M, υ_0 – масса и скорость орудия после выстрела. Отсюда $\upsilon_0 = \frac{m}{M} \cdot \upsilon$ (7.5.)

Закон сохранения импульса объясняет работу реактивного двигателя, приводящего в движение, например, ракеты. В этом случае замкнутой можно считать систему, состоящую из тела ракеты и вытекающего из её сопла газообразного продукта сгорания топлива. Ракету можно рассматривать как орудие, непрерывно стреляющее струёй газа и движущееся в сторону, противоположную направлению движения этой струи.

Реактивный двигатель и ракета являются единственно возможным средством передвижения в космическом пространстве, так как для своего движения не требуют никакой внешней опоры (среды).

Первый проект реактивного летательного аппарата был составлен ещё 1881 г. студентом Института инженеров путей сообщения Н.И. Кибальчичем, казнённым за покушение на Николая II.

При своём движении, вследствие сгорания топлива, ракета непрерывно изменяет свою массу. Поэтому для расчёта скорости ракеты формула (7.5) неприемлема.

Уравнение движения тела переменной массы было выведено профессором Петербургского университета в 1897 г. И.В.Мещерским.

Огромную роль в развитии теории реактивного движения сыграли работы К.Э. Циолковского (начало XX века) В частности, им была выведена формула, позволяющая определить максимально возможную скорость движения ракеты $\upsilon = \upsilon_0 + \upsilon_Г \cdot \ln\left(1 + \frac{M_T}{M_P}\right)$ (7.6.) и носящая его имя. Здесь υ – конечная скорость ракеты; $\upsilon_0, \upsilon_Г$ – её начальная скорость и скорость вылета газов соответственно; M_T, M_P – масса топлива и масса ракеты.

Расчёт полётов современных космических кораблей – сложнейшая научно–техническая задача.

В природе реактивное движение используется некоторыми живыми организмами. Кальмары, медузы, спруты и некоторые другие передвигаются выбрасывая из особых полостей тела струи воды, развивая при этом значительную скорость. Так, скорость кальмаров доходит до 70 км/ч.

2. Закон сохранения момента импульса.

Как было показано выше, импульс замкнутой системы тел есть величина постоянная. $p = const$.

Проводя аналогию между поступательным и вращательным движениями можно записать:

$$\overrightarrow{L} = const \quad (7.7.).$$

Момент импульса замкнутой системы – величина постоянная. (закон сохранения момента импульса).

Для решения задач уравнению (7.7.) удобно придать вид: $I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2$ (7.8.) где I_1 – суммарный момент инерции тел, образующих замкнутую систему до их взаимодействия, ω_1 – угловая скорость этой системы, I_2, ω_2 – момент инерции системы и угловая скорость после взаимодействия.

Из (7.8.) следует, что уменьшение момента инерции приводит к увеличению угловой скорости, и наоборот – увеличение момента инерции приводит к её уменьшению.

Вращающаяся с большой угловой скоростью масса, сохраняет направление вектора момента импульса, то есть сохраняет неизменной ось своего вращения. Это явление получило название гироскопического эффекта. Этим объясняется устойчивость положения Земной оси, продольной оси летящей винтовочной пули, устойчиво движущегося велосипеда и т.п. Гироскопы – массивные тела, вращающиеся с огромной скоростью – основная часть автопилота в самолёте.

Из (7.8.) следует, что уменьшение момента инерции приводит к увеличению угловой скорости, и наоборот – увеличение момента инерции приводит к её уменьшению.

3. Закон сохранения полной механической энергии.

Рассмотрим тело, свободно падающее на землю. Как было показано выше (см. лекцию № 5) с одной стороны работа силы тяжести $A = -\Delta E_p$; с другой стороны $A = \Delta E_k$. Приравнивая правые части, получим: $\Delta E_k = -\Delta E_p$. Отсюда:

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} \ (7.9.) \text{ или } E_k + E_p = const \ (7.10.).$$

Уравнения (7.9.) и (7.10.) являются математической формой записи закона сохранения полной механической энергии:

В замкнутой системе взаимодействующих тел энергия не появляется из ниоткуда и не уходит в никуда, а переходит из одного вида в другой. При этом сумма кинетической и потенциальной энергии есть величина постоянная.

Из закона сохранения энергии можно сделать вывод что, к примеру, шарик, упавший на землю, отскочив должен подняться до первоначальной высоты. Этого не происходит потому, что часть механической энергии переходит во внутреннюю энергию взаимодействующих тел, но этот переход в механике не рассматривается, а изучается в термодинамике. Закон сохранения и превращения энергии распространённый на тепловые процессы получил название первого начала термодинамики.

Вопросы для самоконтроля.

1. Сформулировать закон сохранения импульса.
2. Формула закона сохранения импульса.
3. Сформулировать закон сохранения момента импульса.
4. Формула закона сохранения момента импульса.
5. Сформулировать закон сохранения полной механической энергии.
6. Формула закона сохранения полной механической энергии.

Примеры решения задач.

Задача № 1.

Молот массой m =5 кг, двигаясь со скоростью 4 м/с, ударяет по железному изделию, лежащему на наковальне. Масса наковальни с изделием M = 95 кг. Считая удар абсолютно не упругим, определить полезную работу молота и КПД процесса, скорость системы молот, изделие, наковальня сразу после удара.

Дано:
m =5 кг
$\upsilon = 4$ м/с
$M = 95$ кг.
$A - ?$
$\eta - ?$
$\upsilon_1 - ?$

Решение:

До удара молота по изделию он обладает кинетической энергией $E_{к1} = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$, а наковальня с изделием находятся в состоянии покоя. Значит суммарная энергия системы: молот, наковальня, изделие $E_{к1} = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$.

После удара система приобретает энергию $E_{к2} = \dfrac{(M+m)\cdot\upsilon_1^2}{2}$.

По закону сохранения энергии часть начальной энергии идёт на совершение механической работы. Таким образом:

$$A = E_{к1} - E_{к2} \text{ или}$$

$$A = \frac{m\cdot\upsilon^2}{2} - \frac{(M+m)\cdot\upsilon_1^2}{2} \ (1).$$

До удара система обладает импульсом $P_1 = m\cdot\upsilon$. После удара $P_2 = (M+m)\cdot\upsilon_1$.

По закону сохранения импульса: $m\upsilon = (M+m)\upsilon_1$. Отсюда

$$\upsilon_1 = \frac{m\cdot\upsilon}{M+m} \ (2) \qquad \upsilon_1 = \mathbf{0{,}2\ м/с.}$$

Подставляя значение υ_1 в уравнение (1), получим $A = \dfrac{m\cdot M\cdot\upsilon^2}{2\cdot(M+m)}$; $A =$ **38 Дж.**

КПД равен отношению полезной работы к затраченной энергии. Таким образом:

$$\eta = \frac{m \cdot M \cdot \upsilon^2}{2 \cdot (M+m)} \cdot \frac{2}{m\upsilon^2} \text{ или}$$

$$\eta = \frac{M}{M+m}; \ \eta = \mathbf{0{,}95.}$$

Ответ: υ_1 **= 0,2 м/с;** $A =$ **38 Дж;** $\eta =$ **0,95.**

Задача № 2.

Платформа в виде сплошного диска радиусом 1,5 м и массой 180 кг вращается по инерции относительно оси, проходящей перпендикулярно платформе через её центр масс, с частотой 10 об/мин. В центре платформы стоит человек массой 60 кг. Определить угловую скорость платформы, если человек перейдёт из её центра на край, линейную скорость человека относительно пола и изменение энергии системы.

Дано:	СИ
$R = 1{,}5$ м	
$m_1 = 180$ кг	
$m_2 = 60$ кг	
$\nu = 10$ об/мин	$\frac{1}{6}$ с$^{-1}$
$\omega_2 - ?$	
$\upsilon - ?$	
$\Delta E - ?$	

Решение:

Так как платформа вращается по инерции, то суммарный момент внешних сил равен нулю. Тогда по закону сохранения момента импульса

$I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2$ (1), где I_1, ω_1 – момент инерции и угловая скорость платформы до перехода человека; I_2, ω_2 – после перехода.

Будем считать человека материальной точкой. Тогда по (6.11) его момент инерции до перехода $I_{ч1} = 0$. После перехода – $I_{ч2} = m_2 \cdot R^2$.

Момент инерции платформы не изменится и по (6.15)

$$I_п = \frac{m_1 \cdot R^2}{2}.$$

Таким образом, после перехода человека на край платформы, суммарный момент инерции системы платформа – человек $I_2 = I_{ч2} + I_п$ будет: $I_2 = R^2 \cdot \left(m_2 + \frac{m_1}{2}\right)$ (2).

До перехода $I_1 = \frac{m_1 \cdot R^2}{2}$ (3).

По (1.20) $\omega_1 = 2\pi \cdot \nu$ (4)..

Подставляя значения I_1, ω_1 I_2 в уравнение (1), получим

$\frac{m_1 \cdot R^2}{2} \cdot 2\pi \cdot \nu = R^2 \cdot \left(m_2 + \frac{m_1}{2}\right) \cdot \omega_2$. Отсюда $\omega_2 = \frac{\pi \cdot \nu \cdot m_1}{m_2 + \frac{m_1}{2}}$; $\omega_2 \approx$ **0,63 с$^{-1}$.**

По (1.17) $\omega = \frac{\upsilon}{R}$. Отсюда $\upsilon = \omega \cdot R$; $\upsilon \approx$ **0,945 м/с.**

До перехода человека на край платформы, система обладала энергией $E_1 = \frac{I_1 \cdot \omega_1^2}{2}$.

После перехода — $E_2 = \frac{I_2 \cdot \omega_2^2}{2}$. Учитывая (2), (3), (4), для изменения энергии $\Delta E = E_1 - E_2$, получим $\Delta E = \frac{R^2}{2} \cdot \left(\left(m_2 + \frac{m_1}{2}\right) \cdot (2\pi \cdot \nu)^2 - \frac{m_1 \cdot \omega_2^2}{2}\right)$.

$\Delta E \approx$ **145 Дж.**

Ответ: $\omega_2 \approx$ **0,63 с$^{-1}$;** $\upsilon \approx$ **0,945 м/с;** $\Delta E \approx$ **145 Дж.**

Задачи для самостоятельного решения.

20. На полу стоит тележка в виде доски, снабжённая лёгкими колёсами. На одном конце доски стоит человек. С какой скоростью относительно пола будет двигаться тележка, если человек пойдёт по ней со скоростью 1 м/с (относительно доски)? Масса тележки 20 кг, масса человека 60 кг.

21. Человек стоит на неподвижной скамье Жуковского и бросает мяч массой 0,5 кг со скоростью 12 м/с, направленной горизонтально. Траектория мяча проходит на расстоянии 0,6 м от оси вращения. С какой угловой скоростью начнёт вращаться скамья с человеком, если суммарный момент инерции 4 кг·м^2?

22. Пуля массой m , летящая горизонтально со скоростью υ, попадает в ящик с песком массой *M,* подвешенный на верёвке, и застревает в нём. Определить, на какой угол отклонится верёвка.

СЕМИНАР
по теме «Механика поступательного и вращательного движения»

I. Задания для повторения:

Найдите ошибки в предложениях:

1. Первый закон Ньютона гласит: все тела сохраняют свою скорость неизменной, если на них не действуют силы.
2. Второй закон Ньютона гласит: сила равна произведению массы на ускорение.
3. Из третьего закона Ньютона следует, что равнодействующая сил при взаимодействии тел равна нулю.
4. Инертность – это явление сохранения скорости неизменной.
5. Максимальная сила трения покоя пропорциональна силе тяжести, действующей на него.
6. Вес тела равен его силе тяжести.
7. Закон Архимеда гласит: на тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная массе вытесненной жидкости или газа.
8. При помощи простых механизмов (рычага, наклонной плоскости) можно получить выигрыш в работе.
9. Механическая работа есть скалярное произведение силы тяжести на перемещение.
10. Закон сохранения момента инерции тела.
11. Момент импульса характеризует инертные свойства вращающихся тел.

II. Задания для обсуждения в командах:

1. С наклонной плоскости скатываются два цилиндра одинаковой массы m и радиуса R: один сплошной деревянный, другой – полый металлический. Быстрее скатывается металлический цилиндр. Объясните с точки зрения физических законов.
2. Некоторые животные имеют заострения на конечностях (когти, острые края копыт, подковные шипы), а у других конечности покрыты мелкими неровностями – щетинками, чешуйками или бугорками. Шерсть, щетина, чешуйки и шипы животных расположены наклонно к поверхности. Объясните с точки зрения физических законов.
3. С самолета на парашюте сброшен груз массой 10 кг, который прикреплен к стропам через динамометр. Парашют с грузом достигает скорости установившегося движения и далее опускается равномерно. При движении показания динамометра изменяются. Объясните с точки зрения физических законов.
4. Скоростная киносъемка показала, что падающая кошка сразу начинает быстро вертеть хвостом. При этом тело ее разворачивается в обратную сторону (разумеется с меньшей скоростью) до тех пор, пока тело кошки не станет в такое положение, при котором она приземляется на лапы. Объясните с точки зрения физических законов.
5. «Дайте мне точку опоры, и я переверну Землю!» - такое восклицание легенда приписывает Архимеду. Архимед знал, что нет такого груза, которого нельзя было бы поднять са-

мой слабой силой, если воспользоваться рычагом. Масса Земли $\approx 6 \cdot 10^{24}$ кг. Но мы – то знаем, что это невозможно. Объясните с точки зрения физических законов.